1. Método del Lugar de las Raíces

1. MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES 1

1.1. IDEA BÁSICA 3
1.2. LUGAR DE LAS RAÍCES DE SISTEMAS SIMPLES 10
1.3. LUGAR DE GANANCIA CONSTANTE 12
1.4. REGLAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES 32
1.4.1. Regla No. 1: Número de Ramas 32
1.4.2. Regla No. 2: Puntos de Comienzo y Final 33
1.4.3. Regla No. 3: Comportamiento en el Eje Real 34
1.4.4. Regla No. 4: Simetría 35
1.4.5. Regla No. 5: Asíntotas 36
1.4.6. Regla No. 6: Intersección de Asíntotas 38
1.4.7. Regla No. 7: Ángulos de Salida y Llegada 39
1.4.8. Regla No. 8: Punto de Dispersión o Confluencia 41
1.4.9. Regla No. 9: Intersección con el Eje Imaginario 45
1.4.10. Regla No. 10: Cálculo de la Ganancia 47
1.4.11. Regla No. 11: Suma de Raíces 48
1.5. ADICIÓN DE UN CERO EN UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN 49

1.6. Adición de un Polo en un Sistema de Segundo Orden 50
1.7. Sistema con Retardo Puro 51

1.1. Idea Básica

La respuesta de un sistema depende de la posición de los polos en lazo cerrado

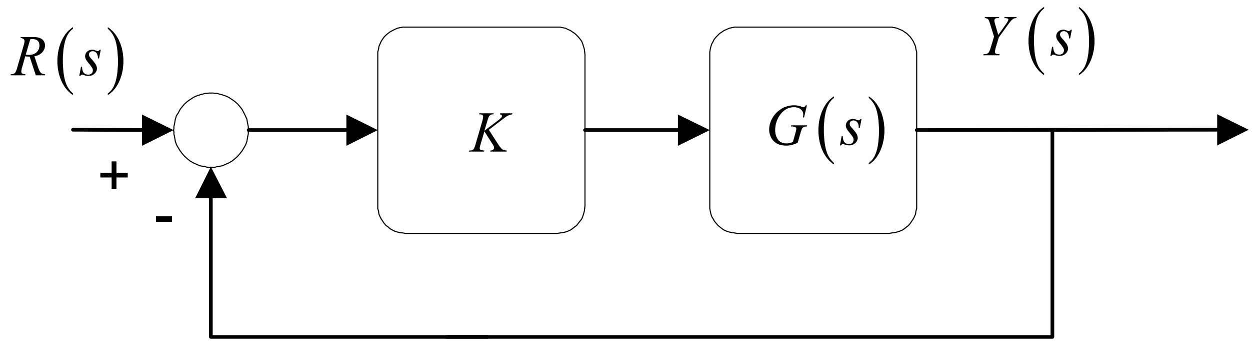
Estos, a su vez dependen de la posición de los polos y ceros en lazo abierto

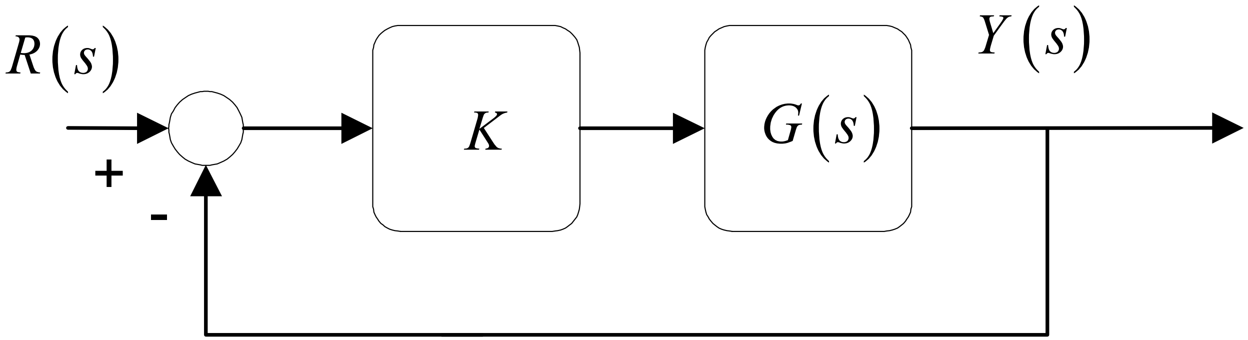
Método:

Se traza la ubicación de las raíces de un sistema el lazo cerrado haciendo variar un parámetro del sistema

Habitualmente el parámetro es el valor de la ganancia del regulador

Esta ganancia se hace variar desde cero a infinito





$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \qquad [1.1]$$

la ecuación característica es:

$1+KG(s)=0$ o $KG(s)=-1$

Se debe cumplir en magnitud y fase

$$\angle KG(s) = \pm 180^\circ (2k+1) \quad k=0,1,2\cdots \qquad [1.2]$$

$$\left|KG(s)\right| = 1 \qquad [1.3]$$

estos puntos son las raíces de la ecuación característica o polos

Ejemplo 1.1. ***Sistema de Segundo orden***

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)} \quad [1.4]$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K}{s^2+s+K} \quad [1.5]$$

la ecuación característica es:

$$s^2+s+K=0 \quad [1.6]$$

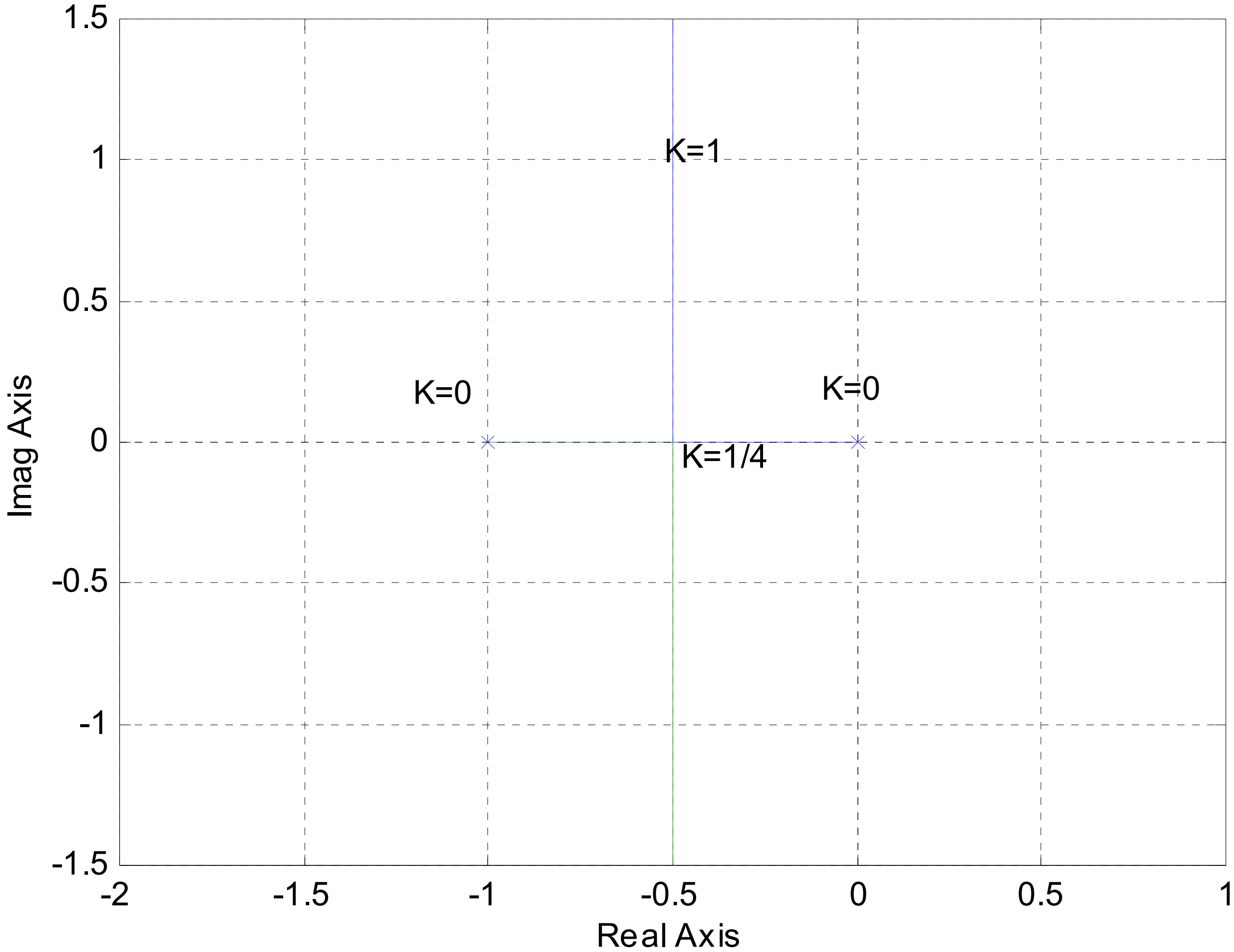
Las raíces están en

$$s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-4K}}{2} \quad [1.7]$$

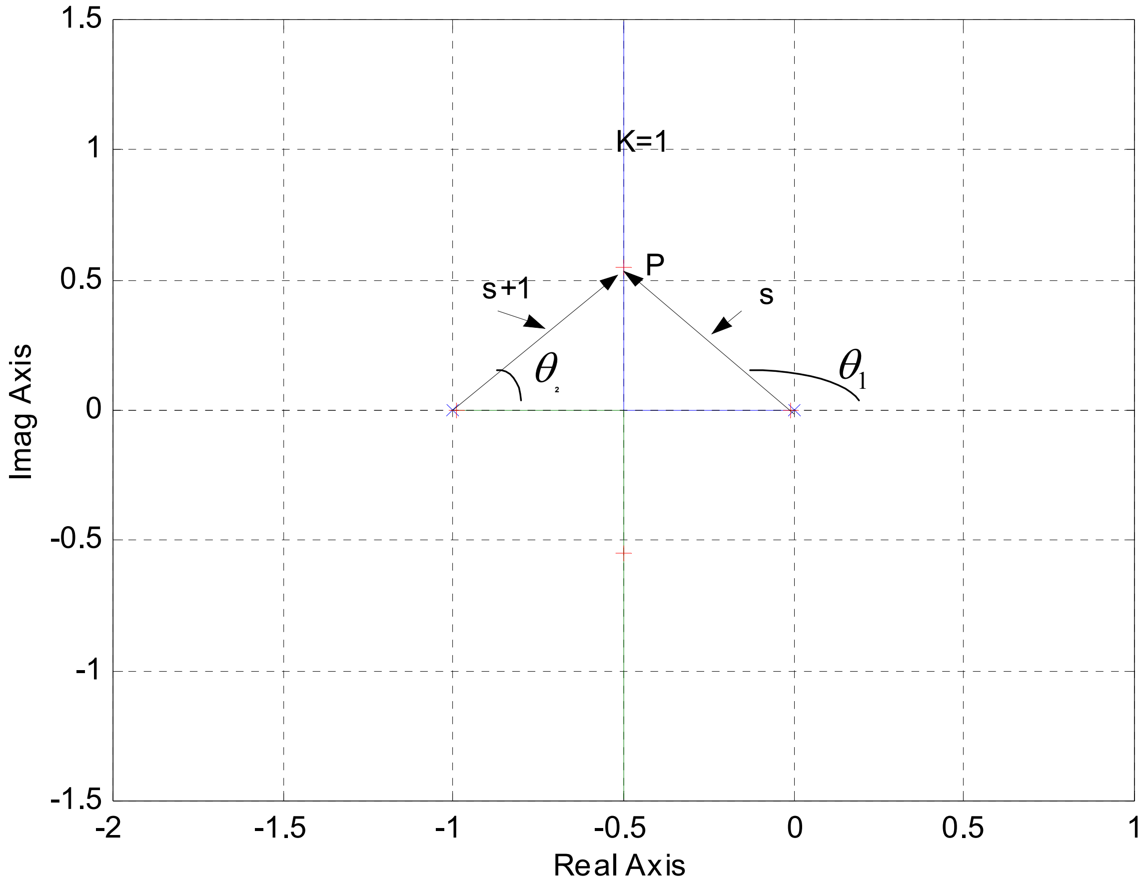
las raíces son reales para $K \leq 1/4$

Gráfica del lugar de las raíces para todo *K*

g=tf(1,poly([0 -1]));rlocus(g);grid



- los polos en lazo cerrado para $K=0$ son los de lazo abierto
- al crecer K los polos se acercan uno a otro hasta ser iguales
- la parte real es independiente de K
- se cumple que
- $\angle\dfrac{K}{s(s+1)} = -\angle s - \angle s+1 = -\theta_1 - \theta_2 = \pm 180^\circ (2k+1) \quad k=0,1,2\cdots$ [1.8]



Todo punto que pertenezca al lugar de las raíces debe cumplir la condición de ángulo.

Dados los polos en lazo cerrado se puede calcular la ganancia correspondiente, por ejemplo

$$s_1 = -\frac{1}{2} \pm j2 \quad [1.9]$$

$$\left|G(s)\right| = \left|\frac{K}{s(s+1)}\right|_{s=-\frac{1}{2}\pm j2} = 1 \quad [1.10]$$

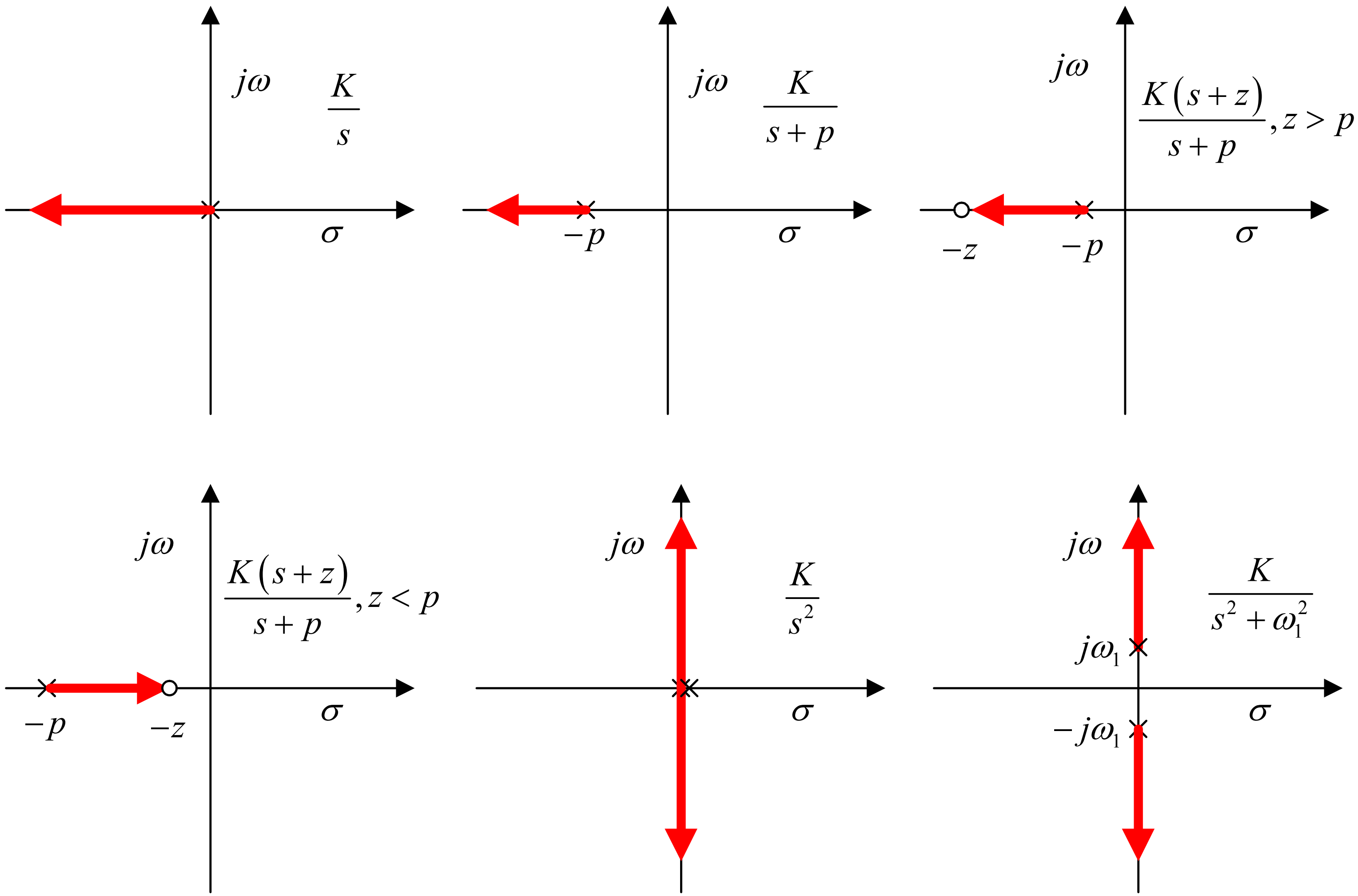
$$K = \left|s(s+1)\right|_{s=-\frac{1}{2}\pm j2} = \frac{17}{4} \quad [1.11]$$

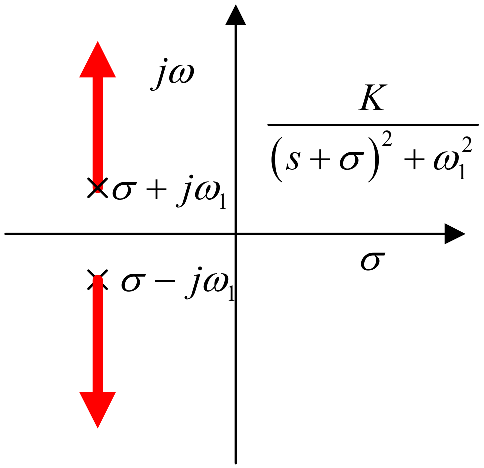
$$K \uparrow \Rightarrow \xi \downarrow$$

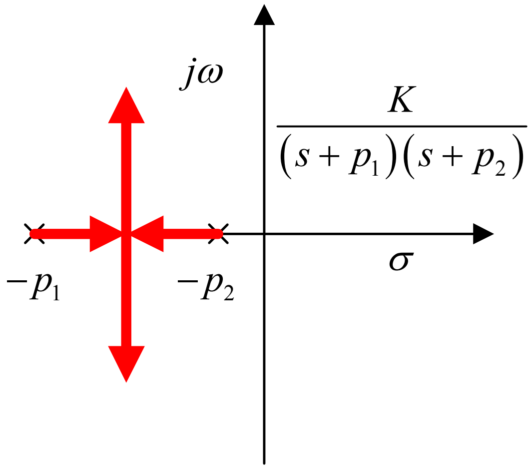
$$K \uparrow \Rightarrow \omega_n \uparrow$$

Este sistema no es nunca inestable

1.2. Lugar de las Raíces de Sistemas Simples




$j\omega$
$\frac{K}{(s+\sigma)^2+\omega_1^2}$
$\sigma + j\omega_1$
σ
$\sigma - j\omega_1$

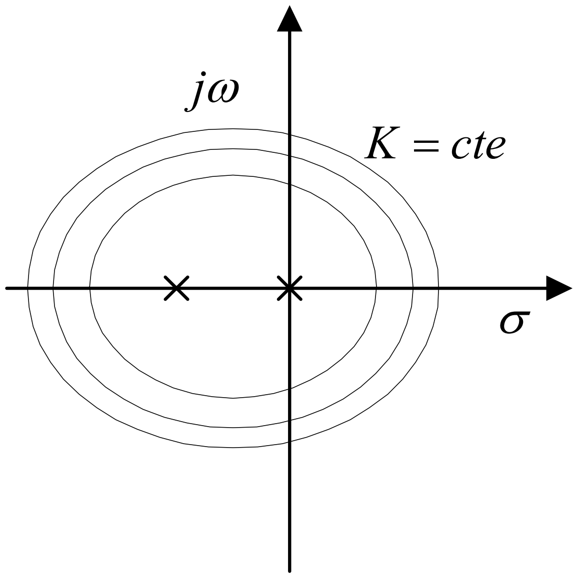

$j\omega$
$\frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$
$-p_1$
$-p_2$
σ

1.3. Lugar de Ganancia Constante

los puntos del plano *s* que tienen igual ganancia son

$$\left|G(s)H(s)\right| = \left|\frac{K}{s(s+1)}\right| = 1 \quad [1.12]$$

$$\left|s(s+1)\right| = K \quad [1.13]$$



----------------------completar

Ejemplo 1.2. ***Sistema de Tercer Orden***

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+2)},H(s)=1 \quad [1.14]$$

Se desea saber *K* para obtener un par de polos dominantes con un $\xi = 0,5$

Condición de ángulo:

$$\underline{|G(s)} = \underline{\left|\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right.} \qquad k = 0,1,2\cdots [1.15]$$

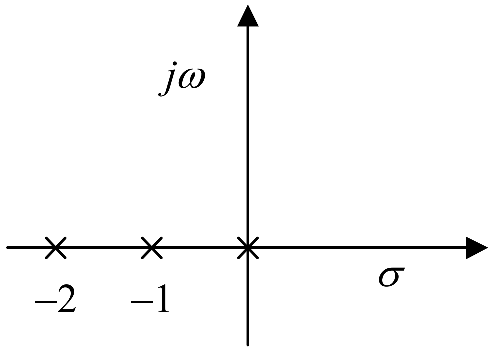
$$= -\underline{|s} - \underline{|s+1} - \underline{|s+2} = \pm 180^{\circ}(2k+1)$$

Condición de amplitud:

$$|G(s)| = \left|\frac{K}{s(s+1)(s+2)}\right| = 1 \quad [1.16]$$

Procedimiento:

1. Hallar el lugar de raíces sobre el eje real.
    a. ubicar los polos y ceros en lazo abierto
    b. hay tres lugares de inicio del lugar para *K=0*



    c. se verifica qué puntos del eje real pertenecen al lugar
        i. el eje real positivo no pertenece ya que los ángulos

$$\angle s = \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ \qquad [1.17]$$

no pueden sumar 180

        ii. los punto que están entre *0* y *-1* sí pertenecen ya que

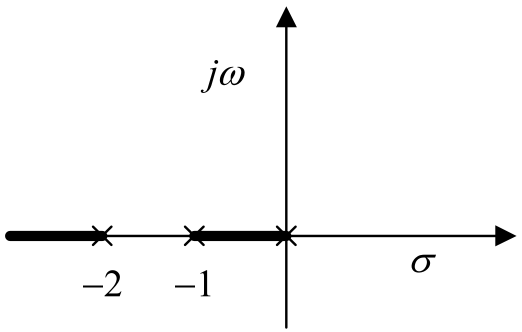
$$\angle s = 180^\circ, \angle s+1 = \angle s+2 = 0^\circ \qquad [1.18]$$

iii. los punto que están entre *-1* y *-2* no pertenecen ya que

$$\angle s = \angle s+1 = 180^\circ, \angle s+2 = 0^\circ \quad [1.19]$$

iv. los punto menores a *-2* sí pertenecen ya que

$$\angle s = \angle s+1 = \angle s+2 = 180^\circ \quad [1.20]$$



2. Determinar las asíntotas

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s^3} \quad [1.21]$$

a. los ángulos serán

$$-3\angle s = \pm 180^\circ (2k+1) \quad [1.22]$$

$$-\angle s = \pm 60^\circ (2k+1) \quad [1.23]$$

como tiene que ser simétrico y repetitivo para cada *k* resultan

$$180^\circ, 60^\circ, -60^\circ \quad [1.24]$$

b. punto de intersección de la asíntota con el eje real. Siempre se cumple

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} = -1 \quad [1.25]$$

o

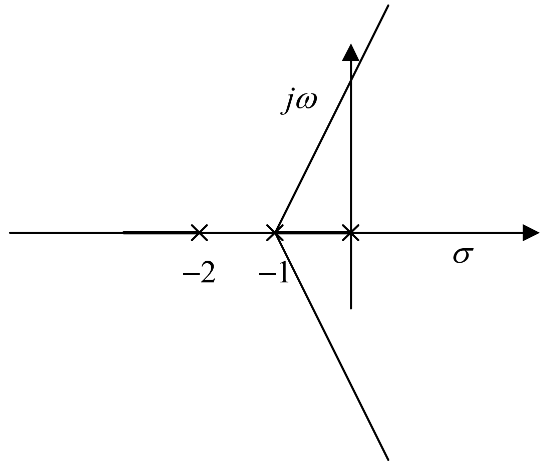
$$s^3 + 3s^2 + 2s = -K \quad [1.26]$$

para *s* muy grande se puede aproximara a (ver regla 6)

$$-\sigma_o = \frac{\sum polos - \sum ceros}{n-m}$$

$$\left(s + \frac{0+1+2}{3-0}\right)^{3-0} = (s+1)^3 = 0 \quad [1.27]$$

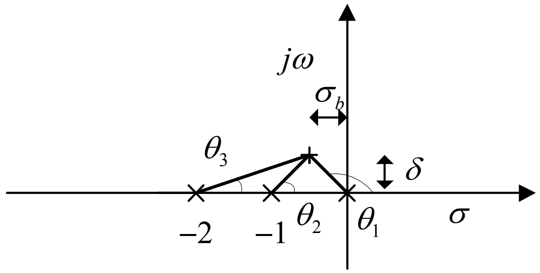
que se interseca en el eje real en $s = -1$



$j\omega$
σ
-2
-1

3. Punto de ruptura: punto donde las raíces dejan de ser reales. En este caso será un punto real $-\sigma_b + j0$.

Se toma un punto complejo entre *0* y *–1*.



Se calculan los ángulos

$$\theta_1 = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{\sigma_b}\right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{-\sigma_b - (-1)}\right) \quad [1.28]$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{-\sigma_b - (-2)}\right)$$

para pequeños valores de δ

$$\theta_1 = 180^\circ - \frac{\delta}{\sigma_b}$$

$$\theta_2 = \frac{\delta}{-\sigma_b + 1} \qquad [1.29]$$

$$\theta_3 = \frac{\delta}{-\sigma_b + 2}$$

para que pertenezca al lugar de las raíces deben sumar *180*

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ = 180^\circ - \frac{\delta}{\sigma_b} + \frac{\delta}{-\sigma_b + 1} + \frac{\delta}{-\sigma_b + 2} \qquad [1.30]$$

$$-\frac{\delta}{\sigma_b} + \frac{\delta}{-\sigma_b + 1} + \frac{\delta}{-\sigma_b + 2} = 0^\circ \qquad [1.31]$$

$$-\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{-\sigma_b + 1} + \frac{1}{-\sigma_b + 2} = 0^\circ \qquad [1.32]$$

$$3\sigma_b^2 - 6\sigma_b + 2 = 0 \qquad [1.33]$$

$$\sigma_b = 0,423$$
$$\sigma_b = 1,577 \qquad [1.34]$$

Se toma el que está entre *0* y *–1*.

4. Puntos que cortan al eje imaginario.

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad [1.35]$$

se hace $s = 0 + j\omega$

$$\left(j\omega\right)^3 + 3\left(j\omega\right)^2 + 2j\omega + K = 0 \quad [1.36]$$

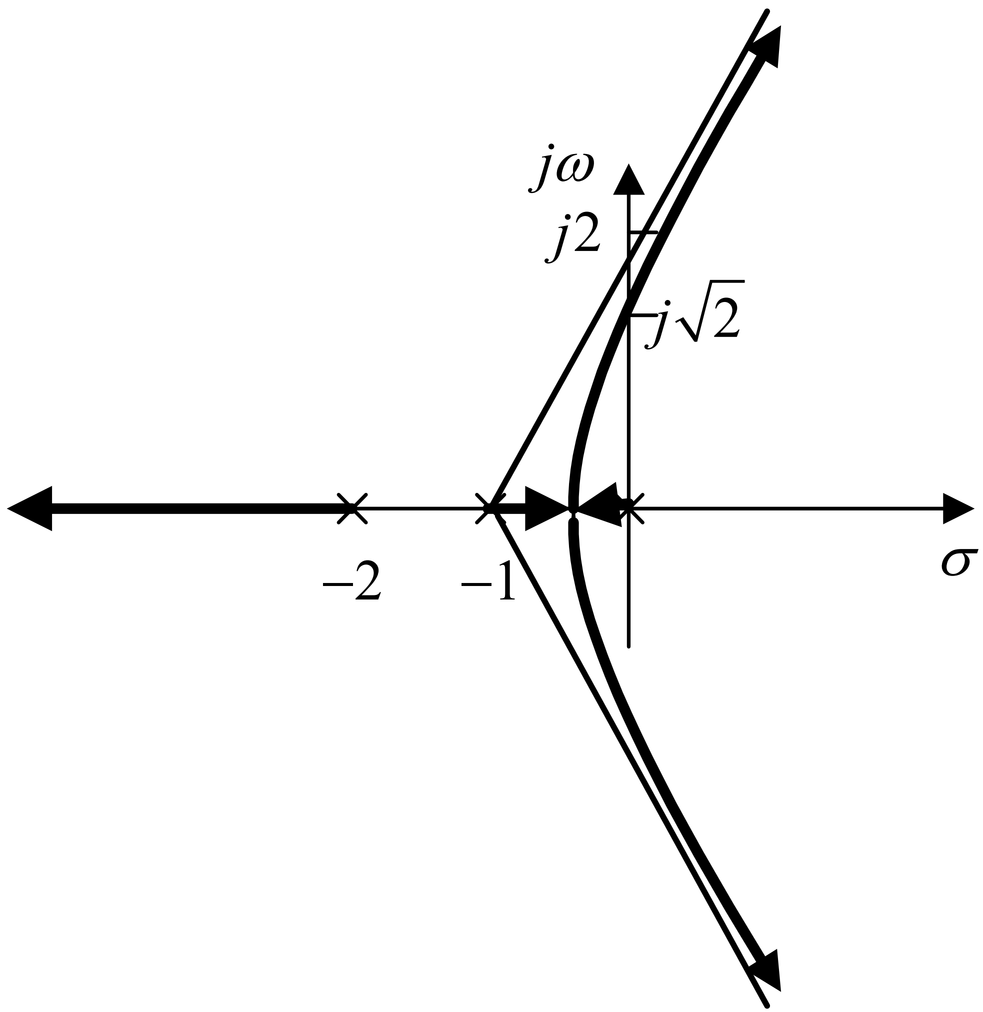
$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + K = 0$$

$$\left(K - 3\omega^2\right) + j\left(2\omega - \omega^3\right) = 0 \quad [1.37]$$

$$\omega^2 = 2$$

$$\omega = \pm\sqrt{2} \quad [1.38]$$

$$K = 3\omega^2 = 6$$


$j\omega$
$j2$
$j\sqrt{2}$
-2
-1
σ

5. Elección de la Ganancia:

   a. Elegir un sistema de segundo orden con un $\xi = 0,5$

   b. Los polos en lazo cerrado deben estar sobre una recta que forme un ángulo de

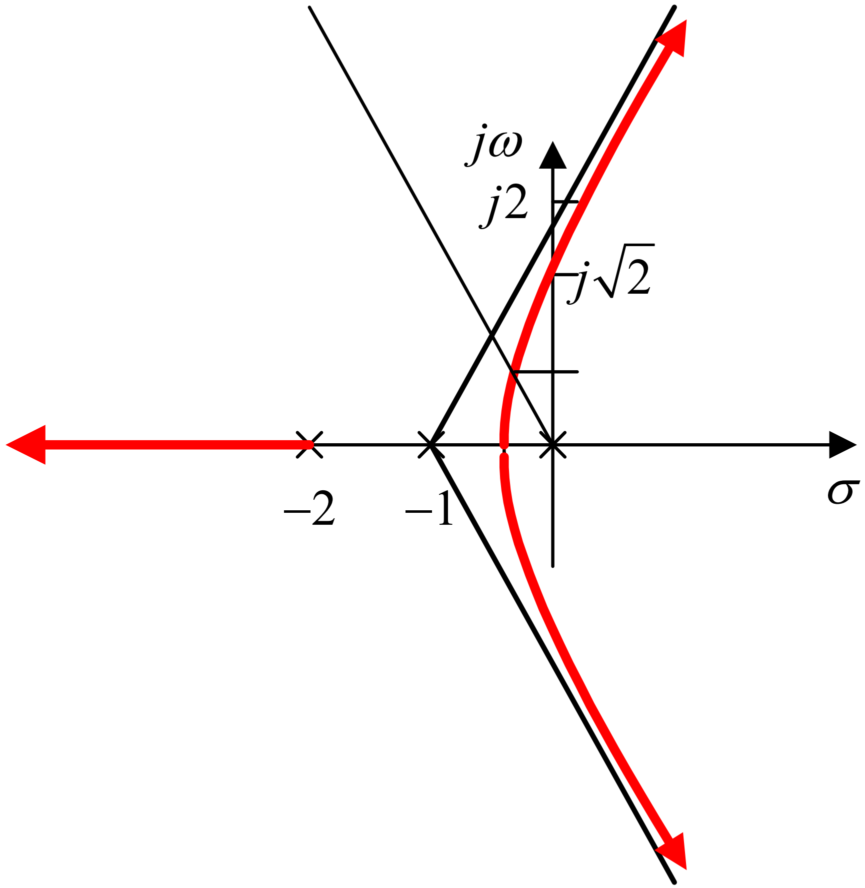
$$\beta = \pm\cos^{-1}\xi = 60^{\circ} \quad [1.39]$$

   c. Se interseca esta recta con el lugar de las raíces y se calculan los polos correspondientes que son:

$$s = -0,33 \pm j0,58 \quad [1.40]$$

   d. Se calcula la ganancia para esa posición haciendo

$$K = \left| s(s+1)(s+2) \right|_{s=-0,33\pm j0,58} = 1,06 \quad [1.41]$$



e. con este valor se encuentra el tercer polo

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \quad [1.42]$$

f. para cualquier punto del lugar se cumple

$$|s||s+1||s+2| = K \quad [1.43]$$

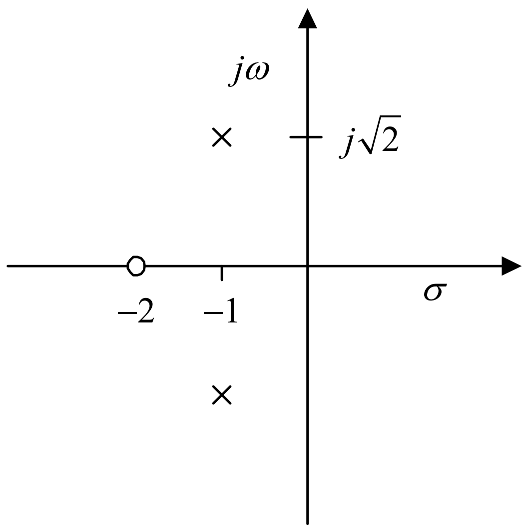
Ejemplo 1.3. ***Sistema de Segundo Orden con Cero***

$$G(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}=\frac{K(s+2)}{\left(s+1+j\sqrt{2}\right)\left(s+1-j\sqrt{2}\right)},H(s)=1 \quad [1.44]$$

Esta función de transferencia tiene dos ceros en $s=-2$ y $s=-\infty$

Procedimiento:

1. Hallar el lugar de raíces sobre el eje real.
   a. ubicar los polos y ceros en lazo abierto
   b. hay dos lugares de inicio del lugar para *K=0*



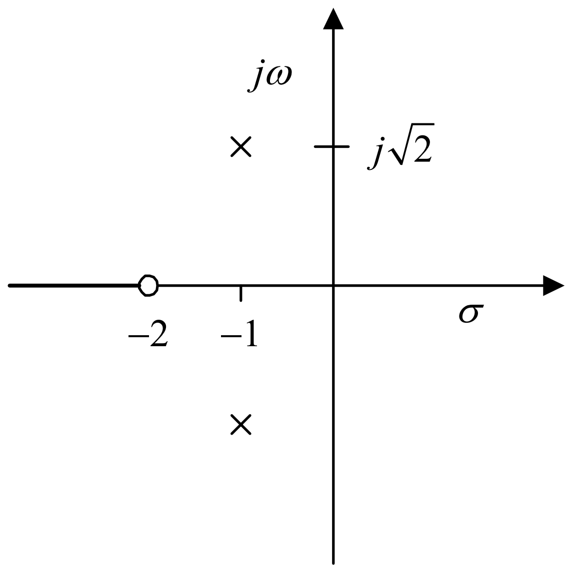
c. se verifica qué puntos del eje real pertenecen al lugar. Los puntos que están a la izquierda del cero cumplen con

$$\underline{|G(s)H(s)} = \underline{|s+2} - \underline{|s+1+j\sqrt{2}} - \underline{|s+1-j\sqrt{2}}$$

$$= 180^\circ + \alpha - \alpha = \qquad k = 0,1,2\cdots \quad [1.45]$$

$$= \pm 180^\circ (2k+1)$$

pertenece al lugar. Los demás puntos no pertenecen.



2. Determinar las asíntotas

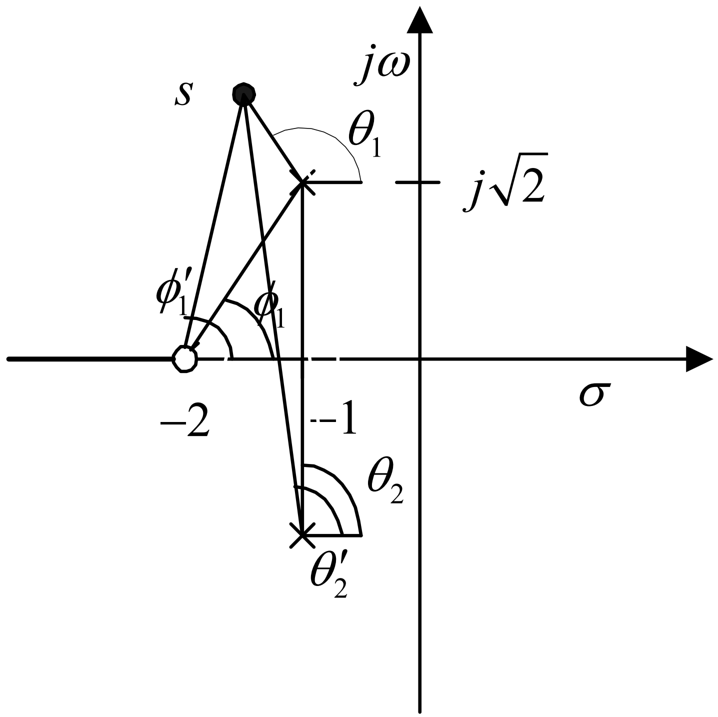
$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K(s+2)}{\left(s+1+j\sqrt{2}\right)\left(s+1-j\sqrt{2}\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{K}{s} \quad [1.46]$$

a. los ángulos serán

$$-\angle s = \pm 180^\circ (2k+1) \quad [1.47]$$

que es el eje real negativo

3. Determinar el ángulo con que sale el lugar de las raíces de los polos complejos. Se elige un punto cercano a uno de estos polos



$$\phi_1' - \left(\theta_1 + \theta_2'\right) = \pm 180^\circ \left(2k+1\right) \quad [1.48]$$

$$\theta_1 = 180^\circ + \phi_1' - \theta_2' \approx 180^\circ + \phi_1 - \theta_2 \quad [1.49]$$

$$\theta_1 = 180^\circ + 55^\circ - 90^\circ = 145^\circ \quad [1.50]$$

4. Punto de entrada: punto donde las raíces comienzan a ser reales. En este caso será un punto real $-\sigma_b + j0$.

En el ejemplo,

$$Z(s)=(s+2),P(s)=\left(s+1+j\sqrt{2}\right)\left(s+1-j\sqrt{2}\right)$$ [1.51]

$$\frac{1}{\sigma+2}=\frac{1}{\sigma+1+j\sqrt{2}}+\frac{1}{\sigma+1-j\sqrt{2}}$$ [1.52]

$$\frac{1}{\sigma+2}=\frac{2(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$ [1.53]

Se toma un punto tentativo *-2* y $-\infty$*–3* por ejemplo $\sigma=-10$

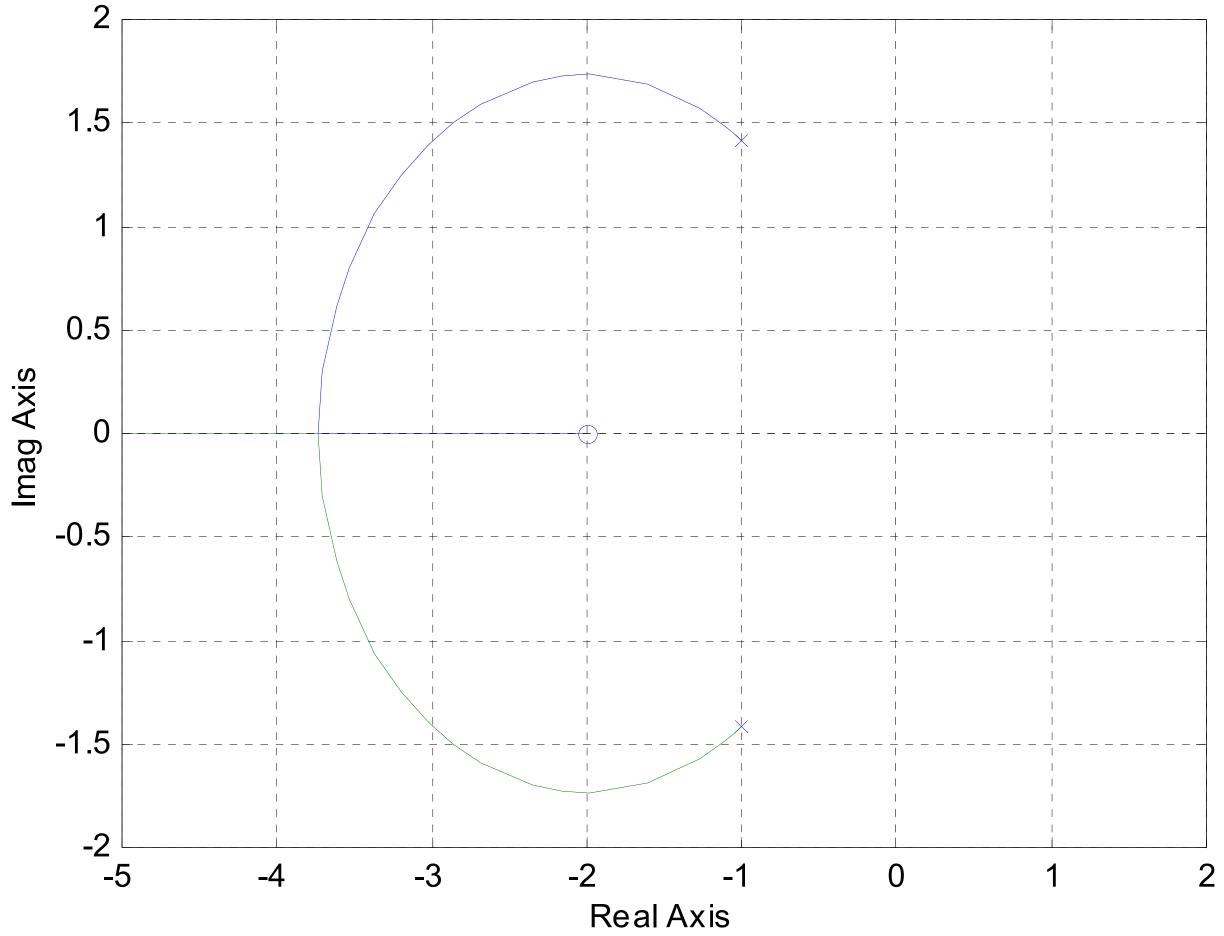
$$\frac{1}{\sigma+2}=\frac{2(-10+1)}{(-10+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{-18}{83}=-0{,}2168$$ [1.54]

$$\sigma=-6{,}61$$ [1.55]

se toma este nuevo valor de σ y se itera hasta la convergencia que resulta en

$$\sigma_b=-3{,}73$$ [1.56]

```
g=tf(poly([-2]),poly([-1-sqrt(2)*i -1+sqrt(2)*i]));rlocus(g),grid
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
Imag Axis
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
Real Axis

1.4. Reglas Para la Construcción del Lugar de las Raíces

Se verá sobre el siguiente ejemplo:

$$G(s)=\frac{K(s+4)}{s(s+3)(s+5)(s^2+2s+2)}=\frac{K(s+4)}{s(s+3)(s+5)(s+1+j)(s+1-j)} \quad [1.57]$$

1.4.1. Regla No. 1: Número de Ramas

El número de ramas es igual al número de polos en lazo abierto.

Esto se cumple ya que

$$G(s)=\frac{KZ(s)}{P(s)} \quad [1.58]$$

siendo la ecuación característica,

$$P(s)+KZ(s)=0 \quad [1.59]$$

el grado de este polinomio está dado por $P(s)$

existen *n* ramas función de *K* .

en este caso son *5* ramas.

1.4.2. Regla No. 2: Puntos de Comienzo y Final

cada rama comienza en un polo de lazo abierto $K = 0$ y termina en un cero de lazo abierto $K = \infty$

haciendo $K = 0$

$P(s) = 0$ [1.60]

resultan los puntos de inicio

haciendo $K = \infty$

$Z(s) = 0$ [1.61]

las ramas que no pueden llegar a ningún cero de lazo abierto terminan en infinito.

En el ejemplo las ramas partirán de

$s = 0, -3, -5, -1 \pm j$ [1.62]

una de las ramas llegará a

$s = -4$ [1.63]

las otras terminan en infinito

1.4.3. Regla No. 3: Comportamiento en el Eje Real

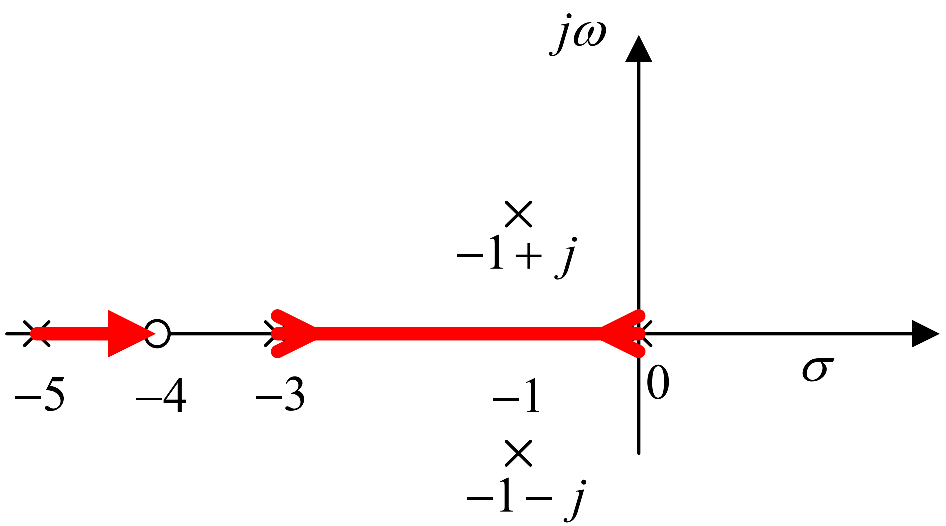
Un punto del eje real pertenece al lugar de raíces si la cantidad de polos y ceros de lazo abierto a la izquierda de dicho punto es impar.

Esto se cumple ya que:

$$\angle G(s) = \angle \frac{KZ(s)}{P(s)} = \angle Z(s) - \angle P(s) = \pm 180^\circ (2k+1) \quad k = 0,1,2\cdots \qquad [1.64]$$

la contribución en ángulo de los polos y ceros complejos se cancela.

la cantidad de polos y ceros a la izquierda debe ser impar para que de *180*.



1.4.4. Regla No. 4: Simetría

El lugar de las raíces es simétrico respecto del eje real

Las raíces complejas son conjugadas

1.4.5. Regla No. 5: Asíntotas

Las ramas que terminan en el infinito son asintóticas para grandes valores de s a rectas cuyos ángulos con el eje real son:

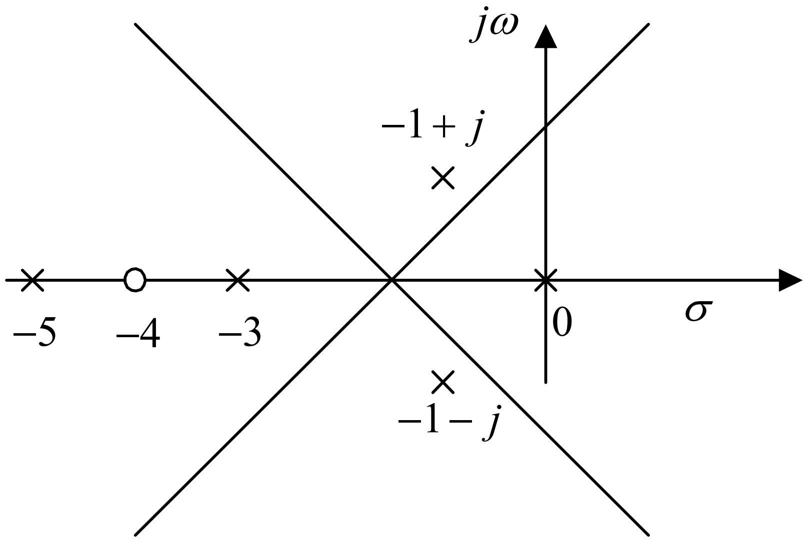
$$\theta_a = \frac{(2q+1)\pi}{n-m}, q = 0, \cdots, n-m-1 \quad [1.65]$$

la contribución de ángulo de un punto ubicado muy lejos estará dada por ángulos iguales desde cada polo y cero, es decir

$$(n-m)\theta_a = (2q+1)\pi \quad [1.66]$$

En este ejemplo

$$\begin{aligned} q &= 0 \quad \theta_a = \pi/(5-1) = 45^\circ \\ q &= 1 \quad \theta_a = 3\pi/4 = 135^\circ \\ q &= 2 \quad \theta_a = 5\pi/4 = -135^\circ \\ q &= 3 \quad \theta_a = 7\pi/4 = -45^\circ \end{aligned} \quad [1.67]$$


$j\omega$
$-1+j$
-5
-4
-3
0
σ
$-1-j$

1.4.6. Regla No. 6: Intersección de Asíntotas

Las asíntotas se intersecan en el eje real a una distancia

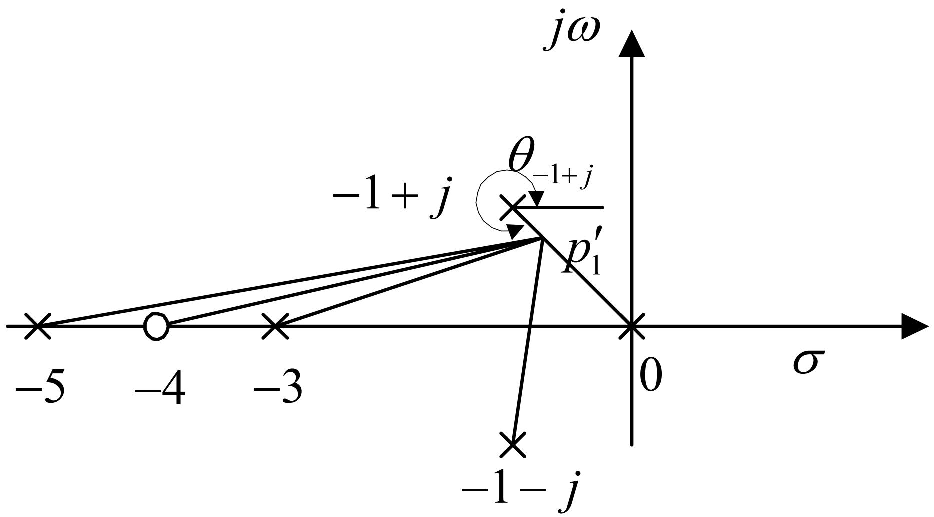
$$-\sigma_o = \frac{\sum polos - \sum ceros}{n-m} \qquad [1.68]$$

en el ejemplo

$$-\sigma_o = \frac{0-3-5-1+j-1-j-(-4)}{5-1} = -1,5 \qquad [1.69]$$

1.4.7. Regla No. 7: Ángulos de Salida y Llegada

Son los ángulos con que parte la rama desde cada polo o con que llegan a cada cero.



La suma de los ángulos debe ser llano.

en el ejemplo,

$$\theta_{-4|p_1'} - \left(\theta_{0|p_1'} + \theta_{-5|p_1'} + \theta_{-3|p_1'} + \theta_{-1+j|p_1'} + \theta_{-1-j|p_1'}\right) = (2q+1)\pi \quad [1.70]$$

para un punto muy cercano a $-1+j$ los ángulos son

$$
\begin{aligned}
\theta_{-4|p_1'} &= \theta_{-4|-1+j} = 18,4^\circ \\
\theta_{0|p_1'} &= \theta_{0|-1+j} = 135^\circ \\
\theta_{-5|p_1'} &= \theta_{-5|-1+j} = 14^\circ \\
\theta_{-3|p_1'} &= \theta_{-3|-1+j} = 26,6^\circ \\
\theta_{-1-j|p_1'} &= \theta_{-1-j|-1+j} = 90^\circ
\end{aligned}
\qquad [1.71]
$$

$$
\begin{aligned}
\theta_{-1+j|p_1'} &= \theta_{-4|p_1'} - \theta_{0|p_1'} - \theta_{-5|p_1'} - \theta_{-3|p_1'} - \theta_{-1-j|p_1'} - (2q+1)\pi \\
&= -67,2^\circ
\end{aligned}
\qquad [1.72]
$$

1.4.8. Regla No. 8: Punto de Dispersión o Confluencia

En los puntos de dispersión o confluencia la derivada de la ganancia con respecto a *s* es cero.

Si hay un punto de dispersión o confluencia, las raíces son múltiples en ese punto:

$$P(s)+KZ(s)=0=(s-s_i)^q Q(s) \quad [1.73]$$

$P(s), Z(s), Q(s)$ no tienen a s_i como raíz

incrementando la ecuación,

$$P(s)+(K+\Delta K)Z(s)=P(s)+KZ(s)+\Delta KZ(s)=0 \quad [1.74]$$

$$1+\frac{Z(s)}{P(s)+KZ(s)}\Delta K=0 \quad [1.75]$$

$$1+\frac{Z(s)}{(s-s_i)^q Q(s)}\Delta K=0 \quad [1.76]$$

$$\frac{\Delta K}{s-s_i} = -\left(s-s_i\right)^{q-1}\frac{Q\left(s\right)}{Z\left(s\right)} \quad [1.77]$$

$$\lim_{s\to s_i}\frac{\Delta K}{s-s_i} = \frac{dK}{ds} = 0 \quad [1.78]$$

No es fácil calcularla para sistemas complejos

Aproximación:

$$1+\frac{Z\left(\sigma\right)}{P\left(\sigma\right)}K = 0 \quad [1.79]$$

$$K = -\frac{P\left(\sigma\right)}{Z\left(\sigma\right)} \quad [1.80]$$

$$\frac{dK}{d\sigma} = \left[Z\left(\sigma\right)\frac{dP\left(\sigma\right)}{d\sigma} - P\left(\sigma\right)\frac{dZ\left(\sigma\right)}{d\sigma}\right]\frac{1}{Z\left(\sigma\right)^2} = 0 \quad [1.81]$$

$$Z\left(\sigma\right)\frac{dP\left(\sigma\right)}{d\sigma} = P\left(\sigma\right)\frac{dZ\left(\sigma\right)}{d\sigma} \quad [1.82]$$

$$\frac{1}{P(\sigma)}\frac{dP(\sigma)}{d\sigma}=\frac{1}{Z(\sigma)}\frac{dZ(\sigma)}{d\sigma} \quad [1.83]$$

$$\frac{d\left(\ln P(\sigma)\right)}{d\sigma}=\frac{d\left(\ln Z(\sigma)\right)}{d\sigma} \quad [1.84]$$

los polinomios son productos de factores, que al derivar su logaritmo,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(\sigma+p_i)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(\sigma+z_i)} \quad [1.85]$$

se calcula esta igualdad

En el ejemplo,

$$Z(s)=(s+4),P(s)=s(s+3)(s+5)(s+1+j)(s+1-j) \quad [1.86]$$

la igualdad es

$$\frac{1}{\sigma+4}=\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma+3}+\frac{1}{\sigma+5}+\frac{1}{\sigma+1+j}+\frac{1}{\sigma+1-j} \quad [1.87]$$

$$\frac{1}{\sigma+4}=\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma+3}+\frac{1}{\sigma+5}+\frac{2(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2+1^2} \quad [1.88]$$

Se toma primeramente el punto medio entre *0* y *–3* es decir $\sigma = -1,5$

$$\frac{1}{-1,5+4} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma+3} + \frac{1}{-1,5+5} + \frac{2(-1,5+1)}{(-1,5+1)^2+1^2} \quad [1.89]$$

$$\frac{1}{2,5} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma+3} + \frac{1}{3,5} + \frac{-1}{1,25} \quad [1.90]$$

$$0,91\sigma^2 + 0,73\sigma - 3 = 0 \quad [1.91]$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1,45 \\ \sigma_2 &= -2,26 \end{aligned} \quad [1.92]$$

se toma *-2,26* como segunda aproximación:

$$\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma+3} = \frac{1}{-2,26+4} - \frac{1}{-2,26+5} - \frac{2(-2,26+1)}{(-2,26+1)^2+1^2} \quad [1.93]$$

$$1,18\sigma^2 + 1,54\sigma - 3 = 0 \quad [1.94]$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 1,07 \\ \sigma_2 &= -2,38 \end{aligned} \quad [1.95]$$

se toma *–2,38*

1.4.9. Regla No. 9: Intersección con el Eje Imaginario

Se determinan con el criterio de *Routh*

Son puntos que hace que el sistema sea marginalmente estable.

En el ejemplo la ecuación característica es

$$s(s+3)(s+5)\left(s^2+2s+2\right)+K(s+4)=0 \qquad [1.96]$$

$$s^5+10s^4+33s^3+46s^2+(30+K)s+4K=0 \qquad [1.97]$$

s^5	1	33	$30+K$
s^4	10	46	$4K$
s^3	$28,4$	$30+0,6K$	
s^2	$35,4-0,211K$	$4K$	
s^1	$\dfrac{(30+0,6K)(35,4-0,211K)-113,6K}{35,4-0,211K}$		
s^0	$4K$		

Se debe cumplir que el término de s^1 debe ser nulo

$$(30+0,6K)(35,4-0,211K)-113,6K=0 \qquad [1.98]$$

$$-0,1266K^2 - 98,69K + 1062 = 0 \quad [1.99]$$

$$K = 10,6 \quad [1.100]$$

Para calcular el valor de las raíces se utiliza:

$$\left(35,4 - 0,211K\right)s^2 + 4K = 0 \quad [1.101]$$

$$s = \pm 1,13j \quad [1.102]$$

1.4.10. Regla No. 10: Cálculo de la Ganancia

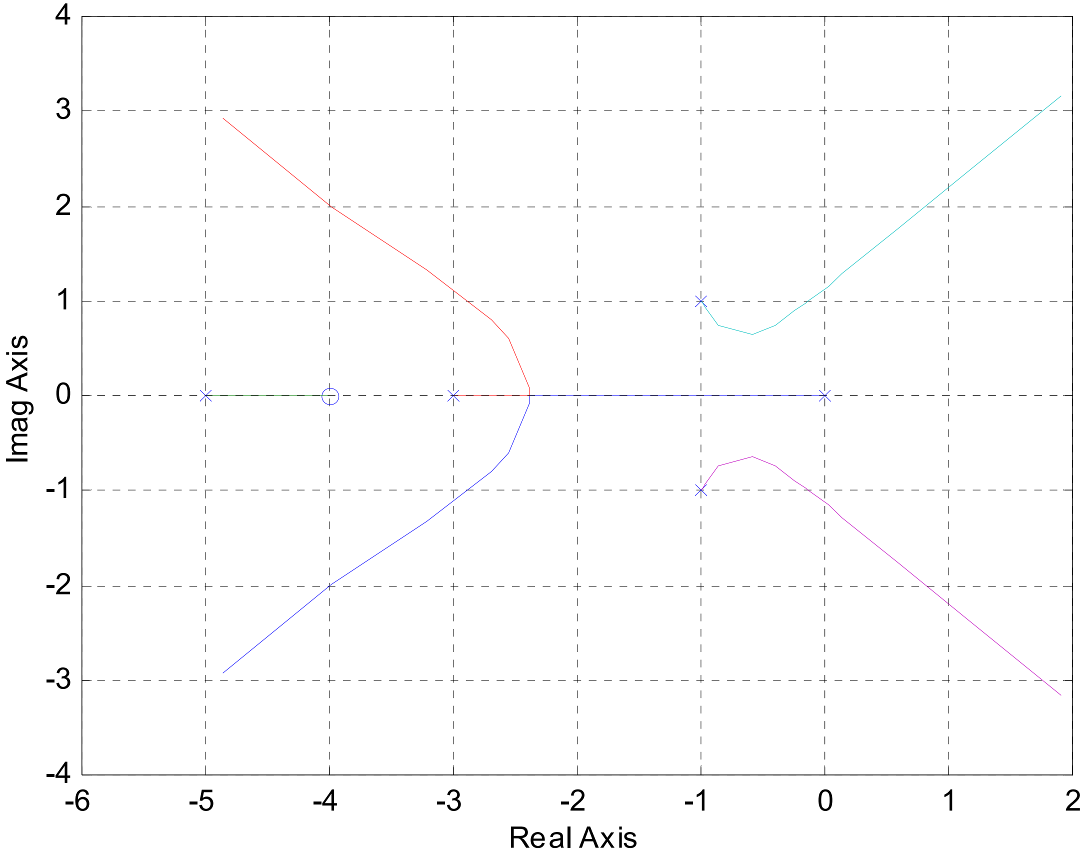
la ganancia para un punto cualquiera se calcula por el módulo

$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s_1 + p_i|}{\prod_{i=1}^{m} |s_1 + z_i|} \qquad [1.103]$$

1.4.11. Regla No. 11: Suma de Raíces

Si la ecuación característica se deja en forma de un polinomio mónico, la suma de las raíces es igual al coeficiente del término s^{n-1} cambiado de signo.

```
g=tf(poly([-4]),poly([0 -3 -5 -1-i -1+i]));rlocus(g),grid
```

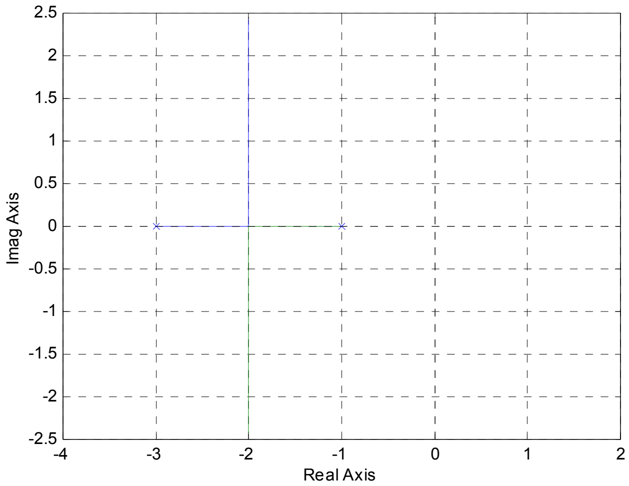


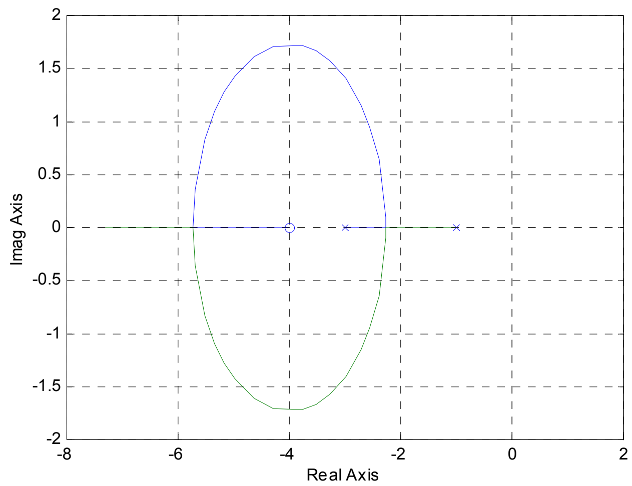
1.5. Adición de un Cero en un Sistema de Segundo Orden

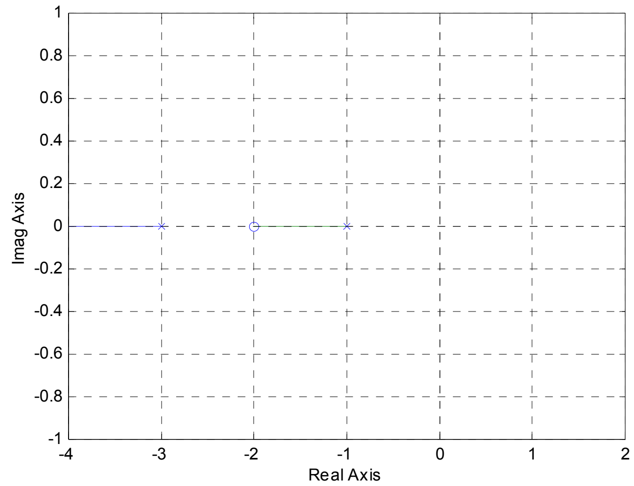
g=tf(1,poly([-1 -3]));rlocus(g),grid

g=tf(poly(-4),poly([-1 -3]));rlocus(g),grid

g=tf(poly(-2),poly([-1 -3]));rlocus(g),grid



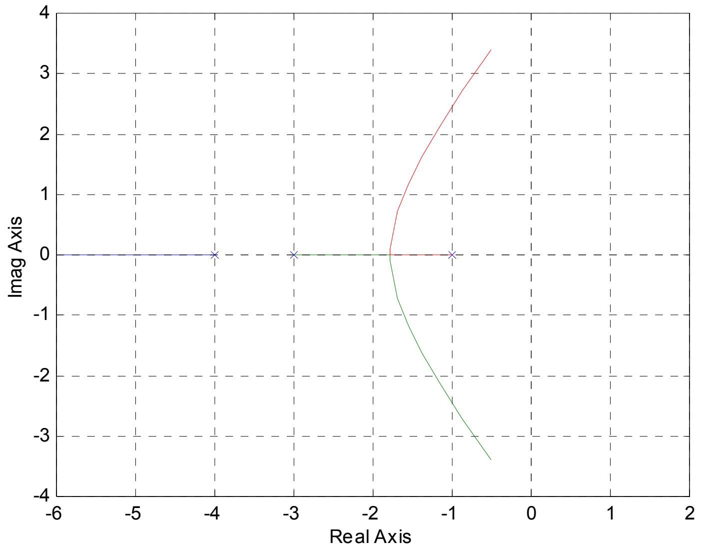




Un cero hace más estable el sistema

1.6. Adición de un Polo en un Sistema de Segundo Orden

```
g=tf(1,poly([-1 -3 -4]));rlocus(g),grid
```



Un polo reduce la estabilidad del sistema

Pensar este efecto en un PID

1.7. Sistema con Retardo Puro

$$G(s)=\frac{Ke^{-T_d s}}{s(s+2)} \quad [1.104]$$

la función de transferencia del retardo es

$$G_d(s)=e^{-T_d s}=e^{-T_d\sigma}e^{-jT_d\omega}=e^{-T_d\sigma}\angle -T_d\omega \quad [1.105]$$

Para que un punto pertenezca al lugar de raíces, el ángulo de la función de transferencia total deberá cumplir

$$\angle G(s)=\angle e^{-T_d s}-\angle s-\angle s+2=(2q+1)\pi \quad [1.106]$$

o

$$-T_d\omega-\angle s-\angle s+2=\pm(2q+1)\pi \quad [1.107]$$

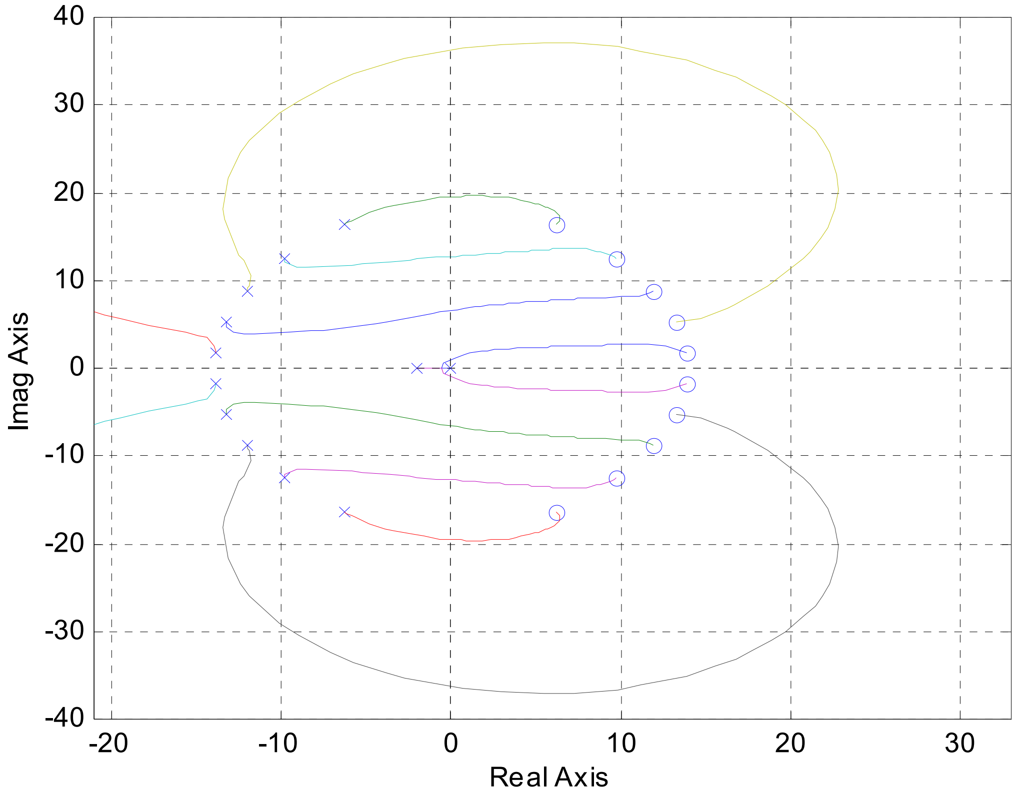
Para $q=0$

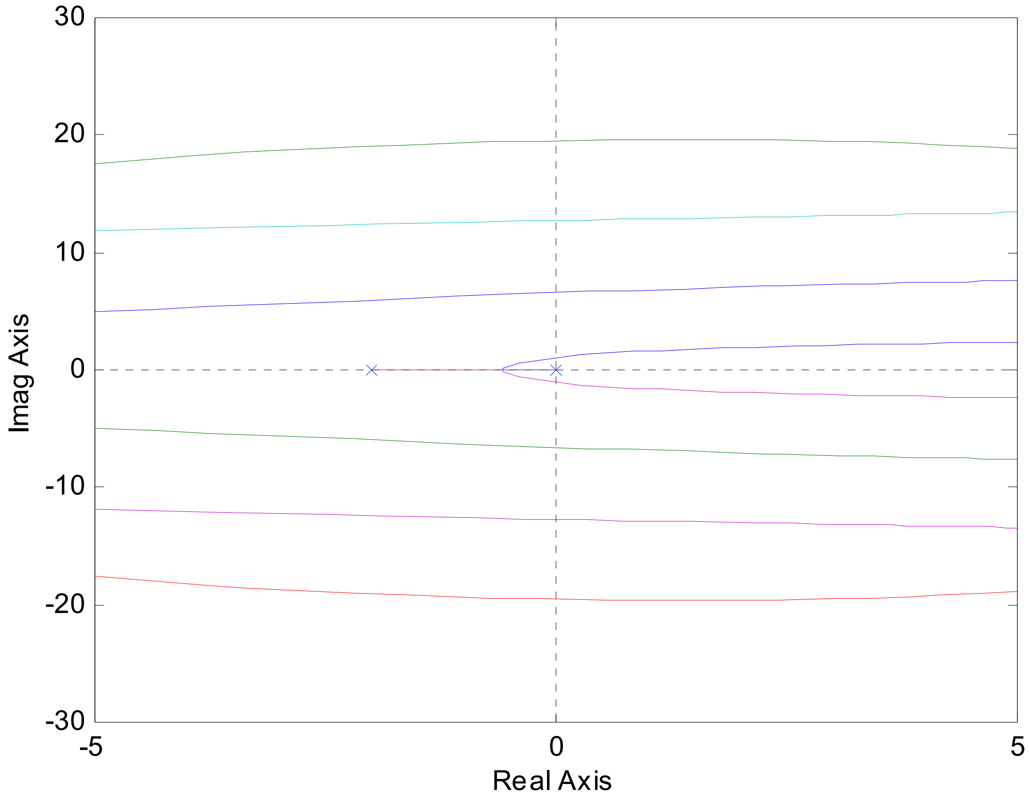
$$\angle s+\angle s+2=\pm\pi-T_d\omega \quad [1.108]$$

haciendo $\omega=0$

$$\angle s+\angle s+2=\pm\pi \quad [1.109]$$

```
[nd,dd]=pade(1,10)
d=poly([0 -2])
ddd=conv(d,dd)
 g=tf(nd,ddd);rlocus(g),grid
```


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-20
-10
0
10
20
30
Real Axis
Imag Axis


30
20
10
0
-10
-20
-30
Imag Axis
-5
0
5
Real Axis