Análisis de respuesta transitoria

En general los sistemas físicos reales que forman parte del sistema de control poseen ***inercias*** que le impiden seguir la señal de entrada de manera instantánea, esto implica la existencia de un período transitorio que es necesario conocer, así como el tiempo requerido para llegar al estado estacionario.

Veremos como responde un sistema de primer orden sometido a distintas entradas de prueba[(@)].

Sistemas de primer orden.

- ***Entrada escalón unitario.***

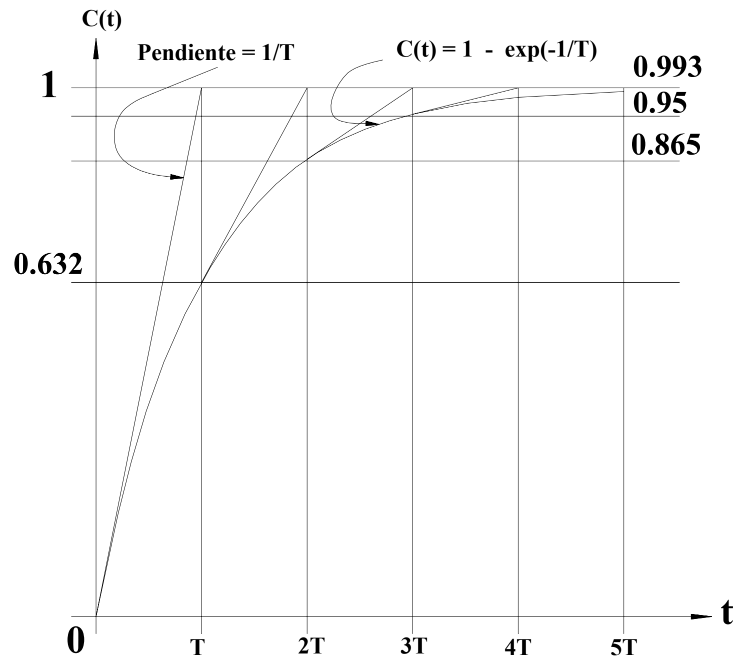
Sea la transferencia de un sistema de primer orden:

$$\frac{C}{R}=\frac{1}{T\cdot s+1} \quad ; \quad R=\frac{1}{s}\ , \ \text{escalón unitario "transformado"}$$

$$C=R\cdot\frac{1}{T\cdot s+1}=\frac{1}{s\cdot(T\cdot s+1)} \quad , \quad \text{descomponiendo en fracciones simples} \Rightarrow$$

$$C=\frac{1}{s}-\frac{T}{T\cdot s+1} \quad , \quad \text{antitransformando} \Rightarrow$$

$$\boxed{c(t)=1-e^{-t/T}} \qquad (1)$$



(@) Se suponen condiciones iniciales nulas.

Desde ya "**T**" es la constante de tiempo y para un valor de 5 veces T, la respuesta es prácticamente igual a la entrada; por lo que si $t \to \infty$ el error (diferencia entre las señales de entrada y salida) tiende a cero. ***Entrada rampa unitaria.***

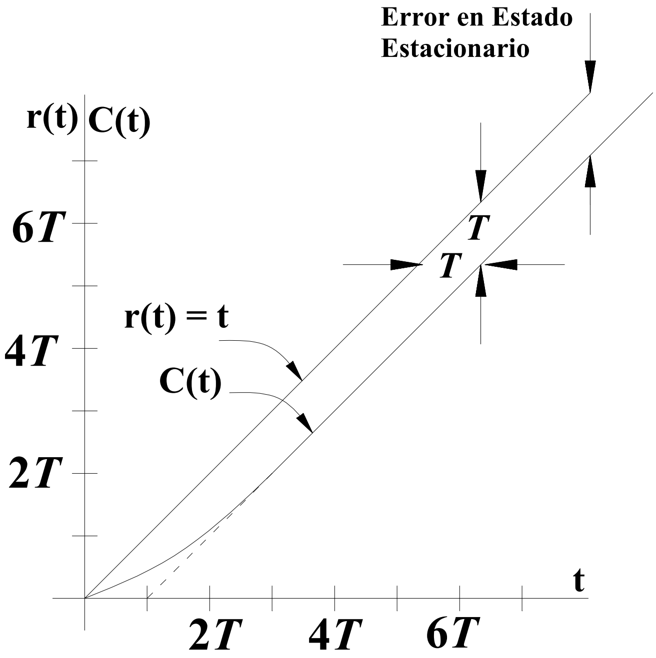
Sea entonces:

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{T \cdot s + 1} \quad ; \quad R = \frac{1}{s^2}\ \text{, rampa unitaria "transformada"}$$

$$C = R \cdot \frac{1}{T \cdot s + 1} = \frac{1}{s^2 \cdot (T \cdot s + 1)} \quad \text{, descomponiendo en fracciones simples} \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{T \cdot s + 1} \quad \text{, antitransformando} \Rightarrow$$

$$\boxed{c(t) = t - T + T \cdot e^{-t/T}} \qquad (2)$$



Se puede comprobar que se llega a (1) derivando (2) o viceversa integrar la (1) para obtener (2) los coeficientes de las ecuaciones diferenciales deben ser constantes en el tiempo.

Sistemas de segundo orden.

La transferencia de lazo cerrado de un sistema de segundo orden se puede expresar como[(&)]:

$$\frac{C}{R} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\cdot\zeta\cdot\omega_n\cdot s + \omega_n^2}$$

Siendo:

ω_n = frecuencia natural no amortiguada

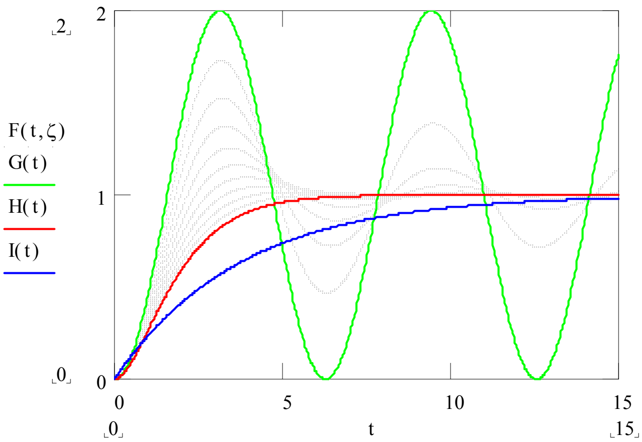
ζ = relación de amortiguamiento (efectivo/crítico)

si: $0 < \zeta < 1 \Rightarrow$ sistema subamortiguado

$\zeta = 1 \Rightarrow$ sistema críticamente amortiguado

$\zeta > 1 \Rightarrow$ sistema sobreamortiguado

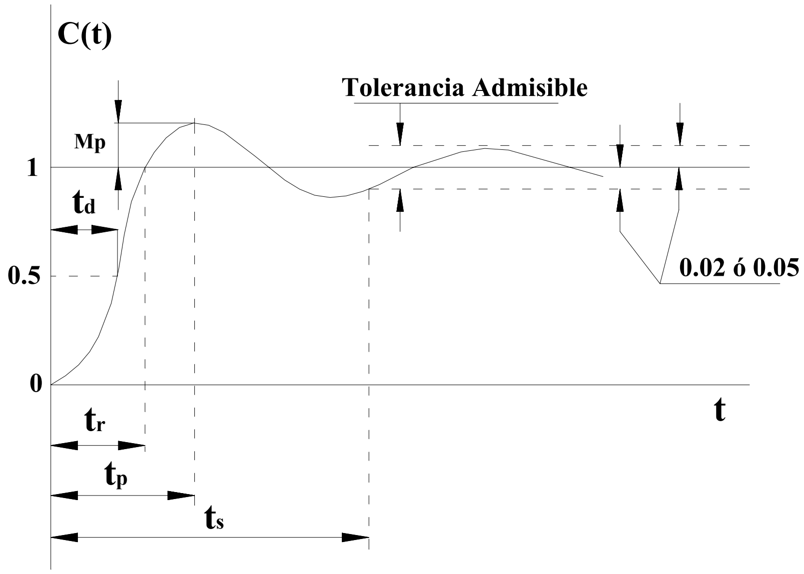
La función F tiene como parámetro ς, variando entre 0.1 y 0.9.
La función G es válida cuando ς, = 0.
La función H es válida cuando ς, = 1.
La función I es válida cuando ς, = 2.



En la figura anterior se ve la incidencia del parámetro ζ en la forma de la respuesta, según sea ζ el sistema será sub - amortiguado, amortiguado crítico ó sobre-amortiguado.

Se estudia la respuesta de un sistema de segundo orden ante una entrada escalón unitario ya que este tipo de entrada es lo bastante drástica como para probar la bondad del sistema en régimen transitorio. Además si se conoce la respuesta ante este tipo de entrada se puede calcular en forma analítica la respuesta ante cualquier tipo de entrada. Se suelen especificar ciertos parámetros como se muestran en la siguiente figura:

[(&)] Ver desarrollo matemático en “Ingeniería de Control Moderna” de K. Ogata, capítulo 4 Pág. 276~279.



Siendo:

t_d = tiempo de retardo

t_r = tiempo de crecimiento

t_p = tiempo de pico, tomado sobre su primer pico de sobre impulso

M_p = sobre impulso máximo, medido desde la unidad

t_s = tiempo de establecimiento, para el cual la respuesta difiere del valor final en un rango de 2~5% (en valor absoluto).

Para concluir comentaremos que es deseable que la respuesta sea rápida y amortiguada; para ello ζ debe estar en un rango de 0,4~0,8.

Valores pequeños de ζ producen sobre impulso excesivo mientras que valores altos hacen que la respuesta sea lenta. Finalmente la siguiente figura muestra los puntos a especificar para obtener una respuesta transitoria satisfactoria.