

ELEMENTOS DE LÓGICA

Ing. Juan Sacerdoti

*Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires*

2002

V 2.01

INDICE

3.- LÓGICA

3.1.- INTRODUCCIÓN

3.2.- PROPOSICIÓN

3.2.1.- SÍMBOLO BASICO CONECTIVO: VALOR DE VERDAD Y PROPOSICIÓN

3.2.2.- UNIVERSO DE PROPOSICIONES

3.3.- IMPLICACIÓN Y TEOREMA

3.3.1.- IMPLICACIÓN SÍMPLE

3.3.1.1.- DEFINICIÓN DE IMPLICACIÓN SÍMPLE

3.3.1.2.- SINÓNIMO

3.3.2.- IMPLICACIÓN DOBLE

3.3.3.- TEOREMA

3.3.4.- NO TEOREMA

3.3.5.- HIPOTESIS Y TESIS DE UN TEOREMA

3.4.- TEOREMAS RELACIONADOS: DIRECTO, CONTRARRECÍPROCO , RECÍPROCO Y CONTRADIRECTO.

3.5.- INCLUSIÓN COMO CONJUNTO VACIO

3.6.- DEMOSTRAR

3.7.- COMO EMPLEAR UN TEOREMA

3.8.- TEOREMAS CON DOS HIPOTESIS:

3.8.1.- TIPOS Y EMPLEOS

3.8.2.- TEOREMAS CONTRARRECÍPROCOS

3.8.3.- DEMOSTRAR POR EL ABSURDO

3.9.- TEOREMAS DE CONJUNTOS Y LOGICA

3.9.1.- TEOREMAS DE INCLUSIONES E IMPLICACIONES

3.9.2.- TEOREMAS DE INTERSECCIONES COMPLEMENTOS Y UNIONES

3. LOGICA

3.1. INTRODUCCIÓN

Las expresiones son un conjunto de símbolos de un lenguaje. Los símbolos se ensamblan en distintos tipos de combinaciones: cadenas (strings), árboles, redes, etc. para armar estructuras compuestas.

La lógica se interesa de un conjunto especial de expresiones que se llaman **Proposiciones**, que son aquellas a las cuales se les puede asignar un atributo (valor o función) de verdad (**Valor de Verdad o Falsedad**) (Atributo binario). La lógica estudia la combinación de estas proposiciones a los efectos de relacionar o inferir unas de otras.

Pueden existir muchas lógicas, según las reglas de combinación de proposiciones o axiomas de inferencia que se establezcan.

La lógica clásica (o determinística) es la de Aristóteles cuyo regla de combinación básica es el Silogismo. El silogismo consiste en una cadena de inclusiones sucesivas de proposiciones , como por ejemplo el clásico:

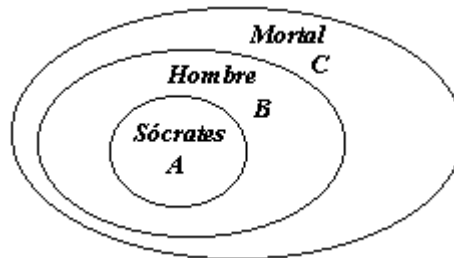
Sócrates es Hombre
Los Hombres son Mortales
 entonces *Sócrates es Mortal*

El silogismo, generalizando el esquema anterior se puede representar por el esquema:

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset C \end{array} \right\} \rightarrow A \subset C$$

donde se destaca la inclusión sucesiva de proposiciones. Esto es, como se vera, la propiedad transitiva de la inclusión.

También puede usarse como representación los diagramas de Venn:



	Lógica	Ejemplos
1	Aristotélica o Determinística	Silogismo $A \subset B \subset C$
2	Probabilística	
3	De la Contradicción	
4	De la Imposibilidad	
5	Fundamentalista	Fe ciega
6	De la Relatividad	

3.2. PROPOSICIÓN

La **proposición** es entonces el modulo básico de la lógica y se presenta de la siguiente manera:

3.2.1.- SIMBOLO BASICO CONECTIVO: VALOR DE VERDAD Y PROPOSICIÓN

Se introduce el conectivo $[T/F]$ [*Verdad/Falso*] o en inglés $[True/False]$ para ser aplicado a expresiones. Las expresiones a la cuales se les asigna arbitrariamente o convencionalmente el valor de verdad o falsedad $[T/F]$ se las llama proposiciones.

Símbolo verdad o falsedad , Proposición : Reglas de uso

$$P := [x \in A] \in \text{Proposición} := P \in \text{Exp} \rightarrow \begin{cases} T \\ F \end{cases}$$
$$:= P \in \{T, F\} \quad :A_1.- [P \rightarrow T] \leftrightarrow [\neg P \rightarrow F]$$

T: Verdad [*True*]

F: Falso [*False*]

P := $[x \in A]$: Proposición

A₁ : Axioma del tercero excluido

Obs 1: El valor de verdad $\{T, F\}$ también puede representarse por el conjunto binario $\{0, 1\}$

Obs 2: El valor de verdad $\{T, F\}$ es el codominio de una función (como se verá más adelante) cuyo dominio son expresiones.

Obs 3: La asignación del valor de verdad es arbitraria. Toda función lo es. La **Verdad** es entonces una convención que puede realizarse de acuerdo a definiciones previas.

Ejemplo 1:

Dada la función real

sin: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \sin x := \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

La expresión : $[\sin \in \text{Continua}]$ puede ser verdadera o falsa. Por lo tanto es una proposición.

Esto depende si la función $[\sin]$ verifica o no el cumplimiento de la definición de continuidad, (que es una convención arbitraria como toda definición). En ese caso entonces se puede asegurar que la proposición será verdadera o falsa.

Ejemplo 2:

Mientras que si tomamos la función f

sin: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^2$$

la expresión $[f \in]$ no es una Proposición, pues no puede asegurarse que sea verdadera o falsa.

En pocas palabras el concepto de Proposición coincide con la Proposición del lenguaje corriente (por ejemplo castellano). Toda Proposición tiene Sujeto Verbo y Predicado. Mientras que la expresión que no es Proposición coincide con el concepto de frase del idioma corriente.

3.2.2. UNIVERSO DE PROPOSICIONES

Las proposiciones tienen su validez dentro de un determinado Universo o contexto. Pueden tener diferente valor de verdad según el Universo de referencia, según la clase de Lenguaje usado.

Ejemplos de proposiciones cuya validez es relativa al Universo o contexto son:

Ejemplo 1: La poligamia es aceptada.

Según la doctrina católica es una proposición falsa. Según la musulmana es verdadera (hasta 4 mujeres).

Ejemplo 2: Un polinomio tiene siempre una raíz.

En el campo real es una proposición falsa. En el campo de los complejos es verdadera.

Ejemplo 3: Dada una función f es diferenciable si y solo si es derivable.

Si $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proposición es verdadera.

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proposición es falsa.

$f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la proposición es verdadera.

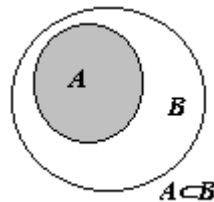
Según el Universo que se trabaje habrá varios tipos de proposiciones. Por ejemplo proposiciones lógicas, matemáticas, físicas etc.

Combinar erróneamente proposiciones de diferentes universos lleva a errores de lógica como se vera en el párrafo que sigue.

3.3.- IMPLICACIÓN Y TEOREMA

La implicación es el elemento básico (módulo) para la construcción de la estructura de la lógica clásica (Aristotélica).

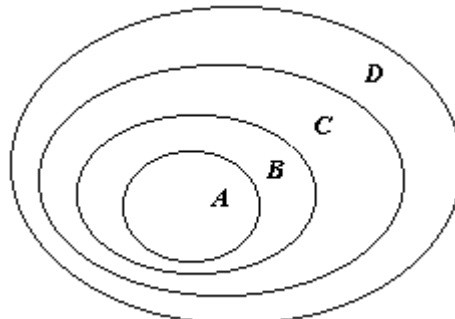
En su esencia consiste en asegurar la validez de una Segunda proposición a partir de una primera proposición.



Ejemplo: Si $A \subset B$ [A asegura B] entonces si $A \in T \rightarrow B \in T$

Todo razonamiento es una cadena sucesiva de Implicaciones que asegura una *última proposición* a partir de una *primera*. Esto no es otra cosa que el silogismo de Aristóteles.

Ejemplo:



3.3.1.- IMPLICACIÓN SIMPLE

3.3.1.1.- DEFINICIÓN DE IMPLICACIÓN SIMPLE

Dado E un universo de proposiciones se define implicación.

Def:

$$A \Rightarrow B := \begin{cases} E \in \text{Universo de Prop} \\ A, B \in \text{Prop}/E \\ A \subset B \end{cases}$$

$$: A_1 \quad A \Rightarrow B \wedge A \in T \Rightarrow B \in T$$

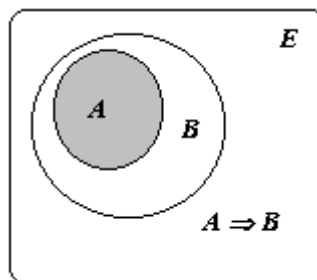
- $A \Rightarrow B$: *A es condición suficiente de B*
- : *A asegura B*
- : *A implica B*
- : *A arrastra B*
- : *Si (cuando) A entonces B*
- : *A solo si B*
- : *Si se cumple A se cumple B*

3.3.1.2.- SINÓNIMO

También suele usarse como sinónimo de $A \Rightarrow B$ al símbolo $B \Leftarrow A$ que se lee:

- $B \Leftarrow A$: *B es condición necesaria de A*
- : *B es asegurado por B*
- : *B es implicado por A*
- : *B es arrastrado por A*
- : *Siempre B si (cuando) A*
- : *B si A*
- : *Debe cumplirse B para cumplirse A*

conviene remarcar que los símbolos $A \Rightarrow B$ y $B \Leftarrow A$ representan la misma implicación.
 $A, B \in \text{Proposiciones}$



Obs 1: La implicación es entonces una inclusión de Proposiciones. El porque de introducir un símbolo nuevo $[\Rightarrow]$, en vez de usar el símbolo $[\subset]$ es el de destacar el hecho de que los conjuntos que se incluyen son justamente *proposiciones*.

Obs 2: En una implicación se presentan siempre 4 elementos:

El Universo E de **proposiciones**.

Las 2 **proposiciones A y B**.

La relación de **inclusión** entre A y B, es decir **quien incluye a quien**.

Obs. 3: Debe observarse también que $A \Rightarrow B$ puede ser verdadera o falsa. Por lo tanto la implicación también es una Proposición. Esto es una Proposición Lógica. (otro Universo).

Obs. 4: Como se ha observado anteriormente es importante que en la implicación, todas las proposiciones deben ser del mismo Universo. En caso contrario el silogismo es falso, o sea se llega a conclusiones contradictorias o erróneas.

Ejemplo 1: Una paradoja clásica es aquella que nos cuenta Cervantes en el Don Quijote:

Merced a su ingenio sencillo de campesino, Sancho Panza divirtió al Duque y a la Duquesa que lo pusieron a cargo del gobierno de la ínsula de Barataria.

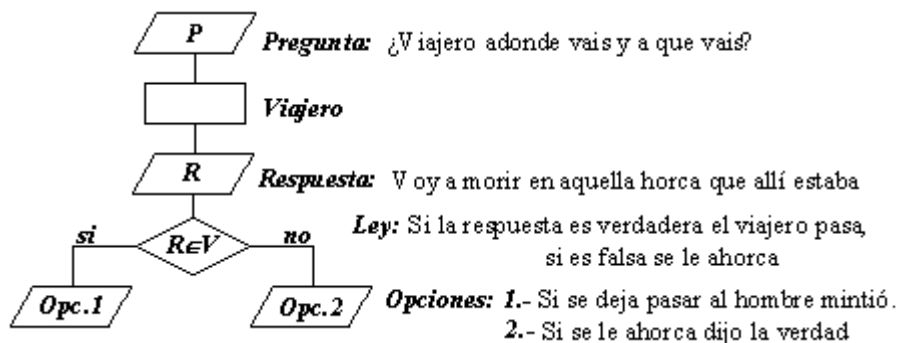
Sancho dejó admirados a los circunstantes por sus juicios y sentencias. Se extendió fuera de la isla su fama, y ella trajo un forastero con el fin de plantearle una cuestión al Gobernador.

El texto de Cervantes es:

Señor, un caudaloso dividía dos términos de un mismo señorío...

Y esté vuesa merced atento porque el caso es de importancia y algo dificultoso. Digo, pues, que sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella, una horca y una como casa de audiencia, en lo cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma: "Si alguno pasara por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adonde y a que va; y si jurare la verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera, por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna." Sabida esta ley y la rigurosa condición della pasaban muchos, y luego en lo que juraban se echaba de ver que decían la verdad, y los jueces los dejaban pasar libremente. Sucedió, pues que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento, y dijeron: "Si a este hombre lo dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y conforme a la ley debe morir; y si lo ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y habiendo jurado la verdad, por la misma ley debe ser libre." Pídase a vuesa merced, señor gobernador, que harán los jueces de tal hombre; que aún hasta agora están dudosos y suspensos. Y habiendo tenido noticia del agudo y elevado entendimiento de vuesa merced, me enviaron a mi a que suplicase a vuesa merced de su parte diese su parecer en tan intrincado y dudoso caso.

La paradoja se puede resumir en el siguiente diagrama:



En ambas opciones se tiene una contradicción **insoluble**. No se cumple el principio del tercero excluido.

Por curiosidad veamos cual fue la respuesta de Sancho Panza :

- Venid acá, señor buen hombre – respondió Sancho – : este pasajero que decís, o yo soy un porro, o él tiene la misma razón para morir que para vivir y pasar la puente; porque si la verdad le salva, la mentira lo condena igualmente; y siendo esto así, como lo es, soy de parecer que digáis a esos señores que a mi os enviaron que, pues están en un fiel de las razones de condenarle o asolverle, que le dejen pasar libremente, pues siempre es alabado más el hacer bien que mal; y esto lo diera firmado de mi nombre si supiera firmar, y yo en ese caso no he hablado de mí, sino que se me vino a la memoria un precepto, entre otros muchos que me dio mi amo don Quijote la noche antes que viniese a ser gobernador de esta ínsula. que fue que cuando la justicia estuviese en duda, me decantase y acogiese a la misericordia.

Ejemplo 2: Otro ejemplo de paradoja es:

Una tribu de indios sacrifica a todos los exploradores que entran en su territorio.

Tienen 2 altares, uno llamado de la Verdad y otro de la Mentira donde se realizan los sacrificios de acuerdo a una respuesta de la víctima fuera verdadera o falsa

Como es la decisión ante el siguiente caso?

Pregunta: ¿Donde te vamos a matar?

Respuesta: En el altar de la Mentira

Opciones: 1.- Si la respuesta fuera verdadera el sacrificio debería cumplirse en el altar de la Verdad.

2.- Si la respuesta fuera el sacrificio debería cumplirse en el altar de la Mentira.

En ambos casos cualquier la decisión sería contradictoria.

Ejemplo 3: Este ejemplo se debe a Bertrand Russell

Sea un conjunto de libros:

$M_1, M_2, M_3, \dots, F_1, F_2, F_3, \dots, Q_1, Q_2, Q_3, \dots$

Que se pueden clasificar por materia: Matemática, Física, Química,... Con estas libros clasificados se preparan Catálogos que detallan los correspondientes a cada tema.

X_M, X_F, X_Q, \dots

Al construir el conjunto de los libros de la misma materia, se puede incluir el Catálogo de la misma materia, o no. Por ejemplo:

$C_M = \{ M_1, M_2, M_3, \dots, X_M \}$ $C_F = \{ F_1, F_2, F_3, \dots \}$ $C_Q = \{ Q_1, Q_2, Q_3, \dots, X_Q \}$

En un segundo nivel de Conjuntos, se puede construir Conjuntos de Conjuntos, por ejemplo clasificándolos en dos Conjuntos, el Conjunto de Conjunto que contiene a su Catálogo, y el Conjunto de Conjunto que no lo contienen. Nótese que los Conjunto de Conjunto son Catálogos. Siguiendo el ejemplo anterior:

$CC_S = \{ C_M, C_Q, \dots \}$ $CC_N = \{ C_F, \dots \}$

Si nos preguntamos, si el mismo CC_N pertenece a CC_S o a CC_N se llega a la siguiente contradicción:

Si $CC_N \in CC_N$ entonces CC_N no sería el Conjunto de Conjunto de Catálogos que se no se contienen, porque contendría uno que se contiene: el mismo CC_N .

Si $CC_N \in CC_S$ entonces CC_S no sería el Conjunto de Conjunto de Catálogos que se contienen, porque habría un Conjunto que no se contiene: el mismo CC_N .

Esta contradicción se produce porque se han confundido la pertenencia a los distintos Universos, el de los Elementos, el de Conjuntos, y el de Conjunto de Conjuntos.

No hay que mezclar en las implicaciones los niveles de Conjuntos

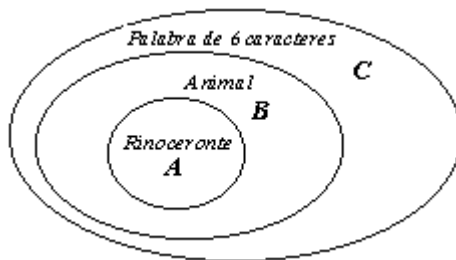
x

$\{x\}$

$\{\{x\}\}$

Ejemplo 4:

Rinoceronte es Animal
Animal es Palabra de 6 caracteres
entonces *Rinoceronte es Palabra de 6 caracteres*



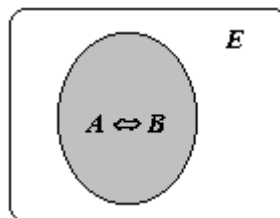
Obs. 5: El silogismo $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ puede plantearse también a través de las Tablas de Verdad. Según nuestro criterio, trabajar por inclusiones sucesivas es más simple.

3.3.2.- IMPLICACION DOBLE

Es también cómodo introducir otro símbolo: el de doble implicación

Def: $A \Leftrightarrow B := \begin{cases} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

$A \Leftrightarrow B$: *A es condición necesaria y suficiente de B*
: *A asegura B y B asegura A*
: *A doble implica B*
: *A doble arrastra B*
: *Si y solo si A entonces B*
: *A si y solo si B*
: *Si y solo si se cumple A se cumple B*



3.3.3.- TEOREMA

Se llama Teorema a toda implicación simple o doble en 2 o más Proposiciones.

Teorema : $A \Rightarrow B$
: $A \Leftrightarrow B$

Obs 1: Debe recordarse que en un teorema se presentan siempre 4 elementos:

Un Universo E de **proposiciones**

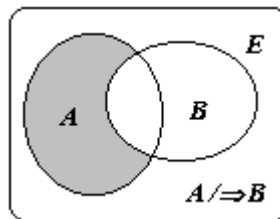
Las 2 proposiciones A y B.

La relación de **inclusión** entre A y B, es decir **quien incluye a quien**.

Obs 2: En Matemática también se suele denominar a algunas implicaciones (Teoremas), como Lemas y Corolarios. El empleo de la palabra Lema es para implicaciones intermedias de un Teorema (Lema de Dios: verdad no discutible) y el uso de la Corolario es para Teoremas que son consecuencias inmediatas de uno principal.

3.3.4.- NO TEOREMA.

Para asegurar que una implicación $[A \Rightarrow B]$ **no es válida**, es decir que no existe Teorema, debe asegurarse que no existe la inclusión de Conjuntos $[A \not\subset B]$.

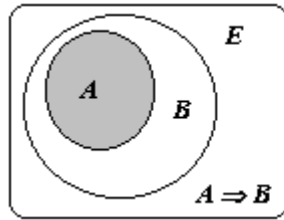


Para eso basta asegurar que hay elementos de A que no están dentro de B. Es decir que $[A \not\subset B] \neq \emptyset$. Esto significa que para asegurar la no validez de una implicación (un teorema), basta encontrar un elemento de $[A \not\subset B]$ que se llama **contraejemplo**.

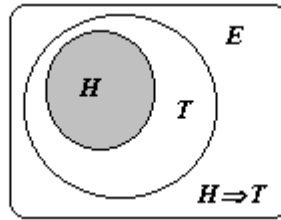
3.3.5.- HIPÓTESIS Y TESIS DE UN TEOREMA.

Se llaman **Hipótesis** y **Tesis** a cualquiera de las dos o más proposiciones que integran una implicación, es decir un Teorema.. Su asignación es arbitraria. Tanto se puede llamar **Hipótesis al conjunto A (incluido) o al conjunto B (incluyente).**

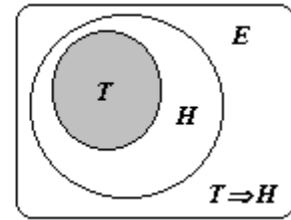
Según se elija nombrarlos se presentan dos formas de lectura del mismo teorema:



*A es condición suficiente de B
B es condición necesaria de A*

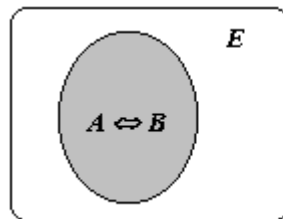


*Eligiendo A como Hipótesis
H es condición suficiente de T
T es condición necesaria de H*

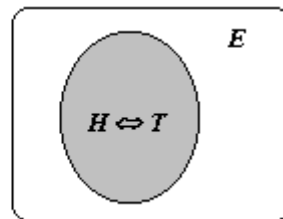


*Eligiendo A como Tesis
T es condición suficiente de H
H es condición necesaria de T*

En los casos de doble implicación las proposiciones son coincidentes, por lo cual es obvio la relatividad de cual proposición se llama Hipótesis y cual Tesis.



*A es condición necesaria y suficiente de B
B es condición necesaria y suficiente de A*



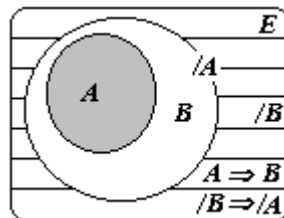
*H es condición necesaria y suficiente de T
T es condición necesaria y suficiente de H*

3.4.- TEOREMAS RELACIONADOS: DIRECTO, CONTRARRECÍPROCO, RECÍPROCO Y CONTRADIRECTO

Cuando se presenta un Teorema $[A \Rightarrow B]$ es decir $[A \subset B]$ una inclusión de Conjuntos de Proposiciones dentro de un Universo E , existe otro Teorema automáticamente $[/B \Rightarrow /A]$ es decir $[/B \subset /A]$ una inclusión de Conjuntos de Proposiciones complementos relativos a dicho Universo E .

Al Teorema $[A \Rightarrow B]$ se lo llama Directo y al Teorema $[/B \Rightarrow /A]$ Contrarrecíproco (TCR).

Teorema de Lógica: $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [/B \Rightarrow /A]$



Obs: Conviene remarcar que A y B son proposiciones dentro del Universo E , (por ejemplo proposiciones de índole matemática) mientras que $[A \Rightarrow B]$ y $[/B \Rightarrow /A]$ también son proposiciones pero de índole lógica.

Es decir $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [/B \Rightarrow /A]$ es un Teorema dentro del Universo de las proposiciones lógicas. Esto es un Teorema de Teoremas.

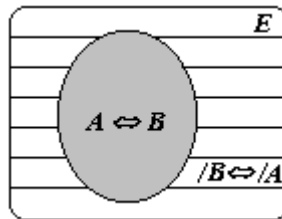
En resumen *si es válido* $[A \Rightarrow B]$ *siempre es válido* $[/B \Rightarrow /A]$ y *viceversa*.

Por otra parte *si es válido* $[A \Rightarrow B]$ *no siempre es válido* $[B \Rightarrow A]$. A este último si existe se lo llama Teorema Recíproco.

Si fuera válido $[B \Rightarrow A]$ *siempre sería válido* $[/A \Rightarrow /B]$ (Teorema Contradirecto) y *viceversa*.

En caso de doble implicación entre A y B se cumple

Teorema de Lógica: $[A \Leftrightarrow B] \Leftrightarrow [/B \Leftrightarrow /A]$



Es decir en el caso de doble implicación son validos simultáneamente los 4 teoremas:

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [/B \Rightarrow /A]$$

(TD) Teorema Directo \Leftrightarrow Teorema Contrarrecíproco (TCR)

$$[B \Rightarrow A] \Leftrightarrow [/A \Rightarrow /B]$$

(TR) Teorema Recíproco \Leftrightarrow Teorema Contradirecto (TCD)

3.5.- ANÁLISIS DE LA INCLUSIÓN COMO CONJUNTO VACÍO

De acuerdo con la *definición de conjunto vacío* se tiene la equivalencia . (Ver más adelante el Teorema correspondiente T 4.1).

Teorema $A \subset B \Leftrightarrow A \cap /B = \emptyset$

Usando este Teorema es fácil demostrar la equivalencia entre los Teoremas Directo y Contrarrecíproco:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap /B = \emptyset$$

Por la propiedad conmutativa de la Intersección se tiene

$$/B \cap A = A \cap /B = \emptyset$$

Se llega a la equivalencia

$$A \subset B \Leftrightarrow /B \cap A = \emptyset = A \cap /B = \emptyset \Leftrightarrow /B \subset /A$$

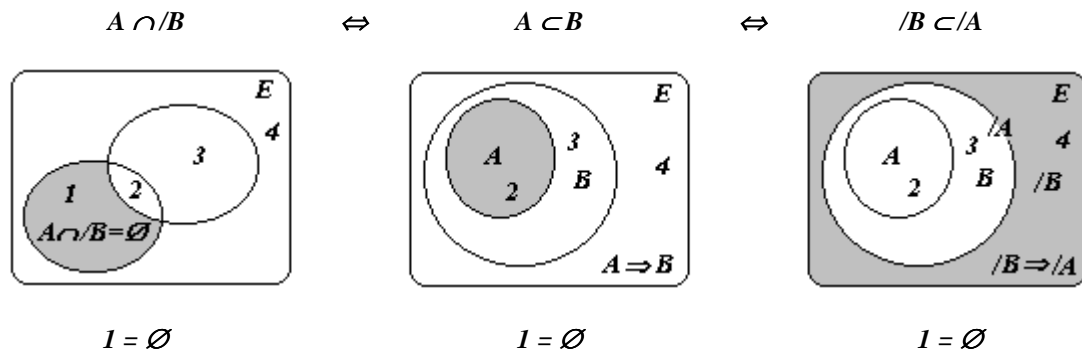
En particular si A y B son Proposiciones:

$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [/B \Rightarrow /A]$$

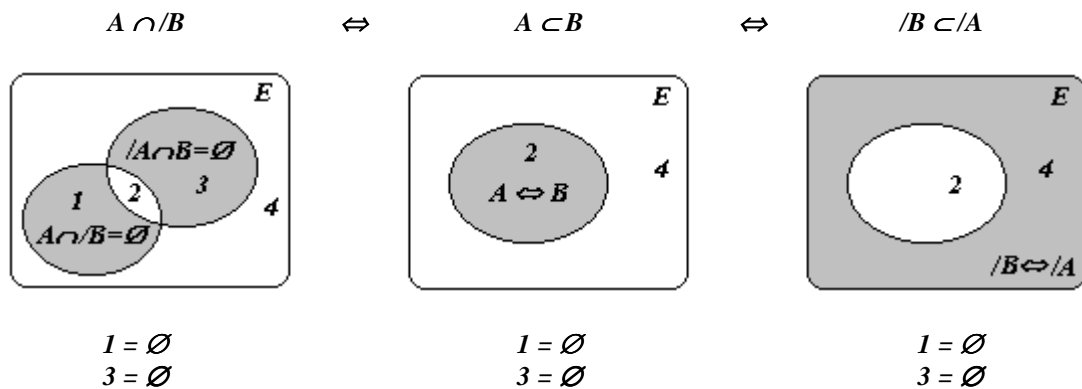
3.6.- DEMOSTRAR

Demostrar un teorema es asegurar que existe una inclusión de proposiciones. Esto puede verse bajo 3 formas equivalentes, que son 3 proposiciones lógicas:

- 1.- Asegurar que existe una inclusión entre dos proposiciones: $A \subset B$. Esto se llama *Demostración Directa*.
- 2.- Asegurar que existe la inclusión de proposiciones $\neg B \subset \neg A$. Esto la *Demostración por el Absurdo*.
- 3.- Asegurar que existe por lo menos un conjunto vacío: $A \cap B = \emptyset$ que representa tanto a la Demostración Directa como a la Demostración por el Absurdo.



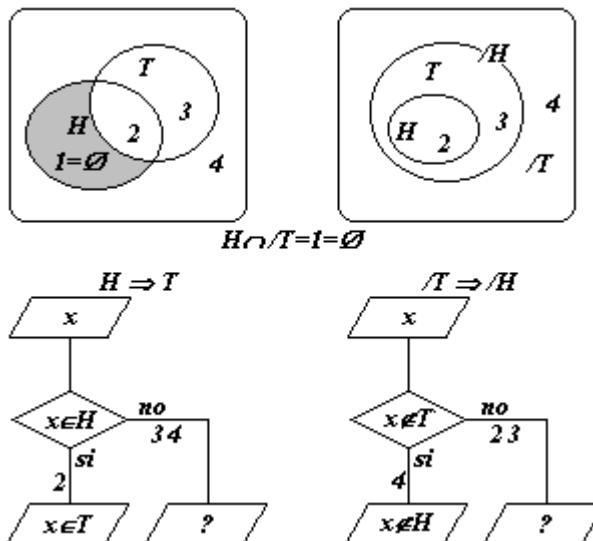
Una demostración de una doble implicación como es obvio es asegurar que hay dos conjuntos vacíos :



3.7.- COMO EMPLEAR UN TEOREMA

3.7.1.- TEOREMA SIMPLE IMPLICACIÓN

Dado un Teorema el silogismo de la lógica aristotélica lleva a conclusiones en algunos casos y en otros no. Para manejar un sistema hay que tener claro las consecuencias en cada caso:



El diagrama de la derecha representa el empleo del teorema $H \Rightarrow T$ equivalente a $H \cap /T = \emptyset$

- 1.- En el caso de verificarse la Hipótesis (conjunto 2), se arrastra que se verifica la Tesis
- 2.- En el caso de **no** verificarse la Hipótesis (conjunto 3 y 4), no se puede concluir nada sobre la Tesis pues el conjunto 3 está incluido en la Tesis y el conjunto 4 no.

El diagrama de la izquierda muestra el empleo del teorema contrarrecíproco $/T \Rightarrow /H$ también equivalente a $H \cap /T = \emptyset$

- 1.- En el caso de **no** verificarse la Tesis (conjunto 4), se implica que **no** se verifica la Hipótesis
- 2.- En el caso de verificarse la Tesis (conjunto 2 y 3), no se puede concluir nada sobre la Hipótesis pues el conjunto 2 es la Hipótesis y el conjunto 3 no le pertenece.

Ejemplos :

Empleo del Teorema Directo: Si una función es diferenciable, entonces es continua :

$$H \quad f \in \text{dif}/a \quad \Rightarrow \quad T \quad f \in C/a$$

$$x^2 \in \text{dif}/0 \Rightarrow x^2 \in C/0$$

$$(x^2 + y^2)^{1/2} \notin \text{dif}/(0,0) \Rightarrow (x^2 + y^2)^{1/2} (\in \text{ ó } \notin) C/(0,0) \quad ??? \quad (\text{por este teorema no se puede concluir.})$$

En este caso (conjunto 3) $(x^2 + y^2)^{1/2} \in C/(0,0)$

$$x/y \notin \text{dif}/(0,0) \Rightarrow x/y \quad (\in \text{ ó } \notin) C/(0,0) \quad ??? \quad (\text{por este teorema no se puede concluir})$$

En este caso (conjunto 4) $x/y \notin C/(0,0)$

Empleo del Teorema Contrarrecíproco : Si un función no es continua, entonces no es diferenciable

$$/T \quad f \notin C/a \quad \Rightarrow \quad /H \quad f \notin \text{dif}/a$$

$$\text{sg}(x) \notin C/0 \Rightarrow \text{sg}(x) \notin \text{dif}/0$$

$$(x^2 + y^2)^{1/2} \in C/(0,0) \Rightarrow (x^2 + y^2)^{1/2} (\in \text{ ó } \notin) \text{dif}/(0,0) \quad ??? \quad (\text{por este teorema no se puede concluir.})$$

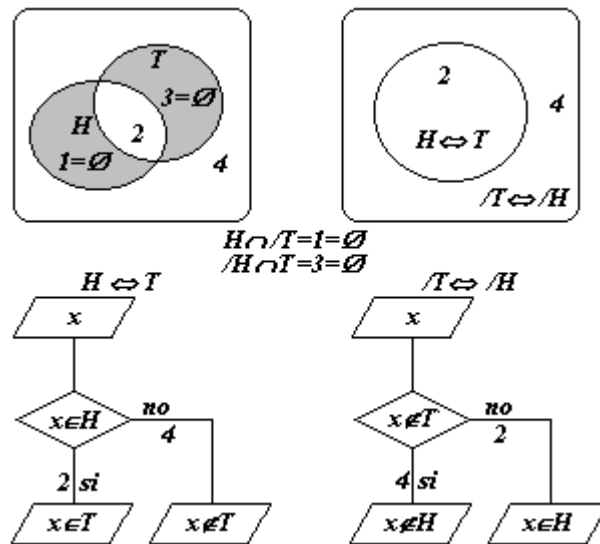
En este caso (conjunto 3) $(x^2 + y^2)^{1/2} \notin \text{dif}/(0,0)$

$$(x^2 + y^2) \in C/(0,0) \Rightarrow (x^2 + y^2) \quad (\in \text{ ó } \notin) \text{dif}/(0,0) \quad ??? \quad (\text{por este teorema no se puede concluir.})$$

En este caso (conjunto 2) $(x^2 + y^2) \in \text{dif}/(0,0)$

3.7.2.- TEOREMA DOBLE IMPLICACIÓN

El Teorema que es doble implicación se emplea de la siguiente manera:



El diagrama de la derecha representa el empleo del teorema $H \Leftrightarrow T$ equivalente a la existencia de los dos conjuntos vacíos $H \cap T = 1 = \emptyset$ y $/H \cap T = 3 = \emptyset$

- 1.- En el caso de verificarse la Hipótesis (conjunto 2), se implica que se verifica la Tesis
- 2.- En el caso de **no** verificarse la Hipótesis (conjunto 4), se implica que se verifica la **no** Tesis.

El diagrama de la izquierda muestra el empleo del teorema contrarrecíproco y contradirecto $/T \Leftrightarrow /H$ también equivalente a la existencia de los dos conjuntos vacíos $H \cap /T = 1 = \emptyset$ y $/H \cap T = 3 = \emptyset$

- 1.- En el caso de **no** verificarse la Tesis (conjunto 4), se implica que **no** se verifica la Hipótesis
- 2.- En el caso de verificarse la Tesis (conjunto 2), se implica que se verifica la Hipótesis.

Ejemplos:

Empleo del Teorema Doble Implicación: Si una función de variable real es diferenciable si y solo si es derivable :

$$H \quad f \in \text{dif}/a \quad \Leftrightarrow \quad T \quad f \in \text{der}/a$$

$$x^2 \in \text{dif}/0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \in \text{der}/0$$

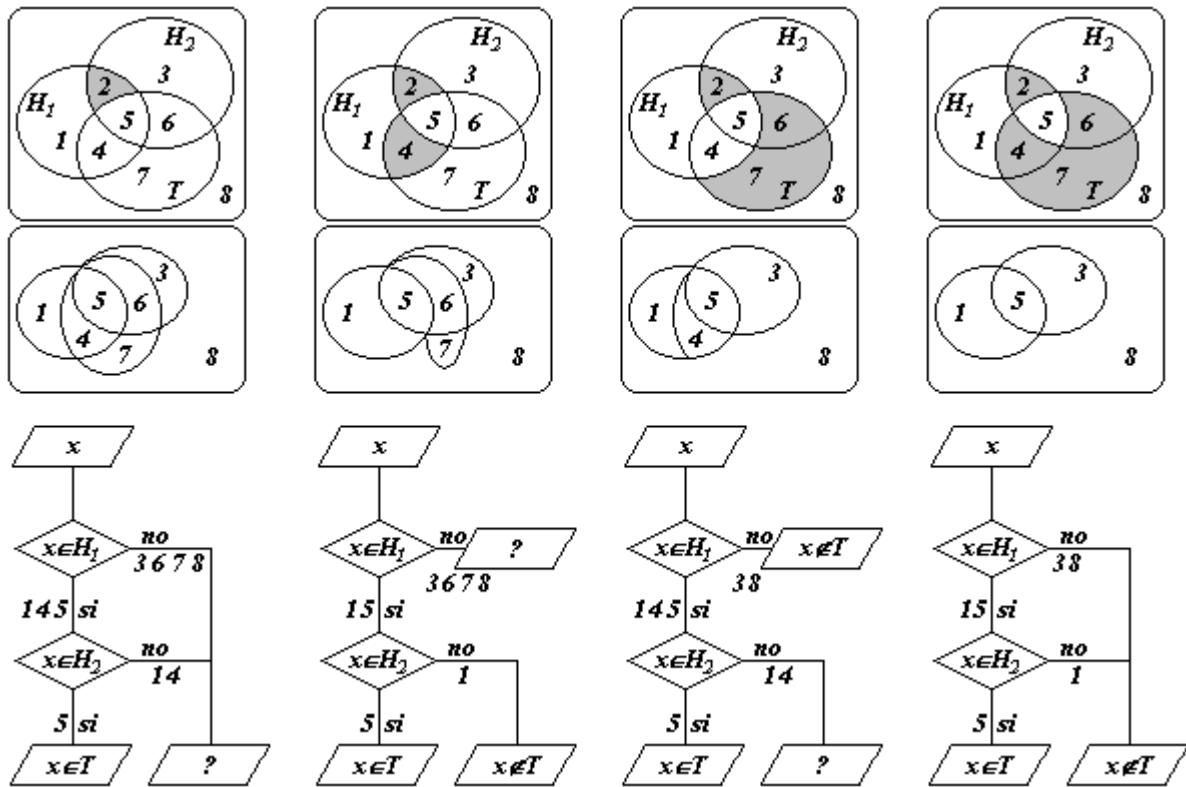
$$x^2 \notin \text{dif}/0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \notin \text{der}/0$$

3.8.- TEOREMAS CON 2 HIPÓTESIS

3.8.1.- TIPOS Y EMPLEO

Dado un Teorema el silogismo de la lógica aristotélica lleva a conclusiones en algunos casos y en otros no. Para manejar un sistema hay que tener claro las consecuencias en cada caso:

Tipo	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Símbolo	$H_1 \cap H_2 \Rightarrow T$	H_1 $H_2 \Leftrightarrow T$	$H_1 \cap H_2 \Rightarrow T$ $H_1 \Leftarrow T$	$H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow T$
Sinónimo	$\left. \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow T$			$\left. \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow T$
Definición	$H_1 \cap H_2 \Rightarrow T$	$\left[\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \right] \Rightarrow T \cap \left[H_2 \Leftarrow \begin{matrix} H_1 \\ T \end{matrix} \right]$	$\left[\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \right] \Rightarrow T \cap [H_1 \Leftarrow T]$	
Conjuntos vacíos	$H_1 \cap H_2 \cap T = 2 = \emptyset$	$H_1 \cap H_2 \cap T = 2 = \emptyset$ $H_1 \cap H_2 \cap T = 4 = \emptyset$	$H_1 \cap H_2 \cap T = 2 = \emptyset$ $H_1 \cap H_2 \cap T = 6 = \emptyset$ $H_1 \cap H_2 \cap T = 7 = \emptyset$	$H_1 \cap H_2 \cap T = 2 = \emptyset$ $H_1 \cap H_2 \cap T = 4 = \emptyset$ $H_1 \cap H_2 \cap T = 6 = \emptyset$ $H_1 \cap H_2 \cap T = 7 = \emptyset$



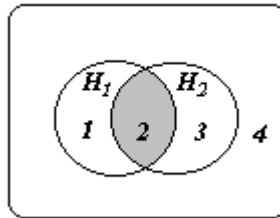
3.8.2.- TEOREMAS CONTRARRECÍPROCOS

El Teorema con dos Hipótesis de primer tipo es

$$H_1 \cap H_2 \Rightarrow T$$

Tiene el siguiente Teorema Contrarrecíproco

$$\neg T \Rightarrow \neg (H_1 \cap H_2)$$



La negación de la Tesis asegura la negación de la Hipótesis. Esta última está representada por el conjunto $2 = (H_1 \cap H_2)$. Su negación, es el conjunto complemento, que es la unión de los conjuntos **1, 3 y 4**, es decir

$$\begin{aligned} \neg T \Rightarrow \neg (H_1 \cap H_2) &= \neg 2 = 1 \cup 3 \cup 4 \\ &= (H_1 \cap \neg H_2) \cup (\neg H_1 \cap H_2) \cup (\neg H_1 \cap \neg H_2) \end{aligned}$$

Este es el Teorema Contrarrecíproco en general. Pero si se interseca la **No** Tesis con alguna de la Hipótesis se tienen dos proposiciones equivalentes :

$$\begin{aligned} H_1 \cap \neg T &\Rightarrow H_1 \cap (\neg (H_1 \cap H_2)) = H_1 \cap \neg 2 = H_1 \cap (1 \cup 3 \cup 4) \\ &= H_1 \cap [(H_1 \cap \neg H_2) \cup (\neg H_1 \cap H_2) \cup (\neg H_1 \cap \neg H_2)] \\ &= 1 \\ &= H_1 \cap \neg H_2 \Rightarrow \neg H_2 \end{aligned}$$

$$H_1 \cap \neg T \Rightarrow \neg H_2$$

y análogamente

$$H_2 \cap \neg T \Rightarrow \neg H_1 \quad \text{es decir}$$

$$[H_1 \cap H_2 \Rightarrow T] \Leftrightarrow [H_1 \cap \neg T \Rightarrow \neg H_2] \Leftrightarrow [H_2 \cap \neg T \Rightarrow \neg H_1]$$

Otra forma de ver esta equivalencia es a partir del conjunto vacío

$$\emptyset = 2 = H_1 \cap H_2 \cap \neg T = H_1 \cap \neg T \cap H_2 = H_2 \cap \neg T \cap H_1$$

$$[H_1 \cap H_2 \Rightarrow T] \Leftrightarrow [H_1 \cap \neg T \Rightarrow \neg H_2] \Leftrightarrow [H_2 \cap \neg T \Rightarrow \neg H_1]$$

3.8.3.- DEMOSTRAR POR EL ABSURDO

A partir del análisis anterior como:

$$\left. \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow T \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} H_1 \\ \neg T \end{matrix} \right\} \Rightarrow \neg H_2 \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} H_2 \\ \neg T \end{matrix} \right\} \Rightarrow \neg H_1$$

demonstrar por el absurdo consiste en mantener una hipótesis negar la tesis y asegurar que es no es válida la otra hipótesis. (Siempre el conjunto **2** es vacío)

Ejemplo

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} 0 \leq f(x) \leq g(x) \\ \int_s g(x) dx \in CV \end{array} \right\} &\Rightarrow \int_s f(x) dx \in CV & \Leftrightarrow & \left. \begin{array}{l} 0 \leq f(x) \leq g(x) \\ \int_s f(x) dx \notin CV \end{array} \right\} \Rightarrow \int_s g(x) dx \notin CV \\
 & & \Leftrightarrow & \left. \begin{array}{l} \int_s g(x) dx \in CV \\ \int_s f(x) dx \notin CV \end{array} \right\} \Rightarrow (f(x) < 0) \cup (g(x) < f(x))
 \end{aligned}$$

3.9.- TEOREMAS DE CONJUNTOS Y DE LÓGICA

Resumen de definiciones equivalentes

Def: El signo de definición o de asignación [:=] opera en una demostración como una doble implicación [\Leftrightarrow]

Def: Inclusión $A \subset B$:= $\forall(x \in A) : (x \in B)$
 := $A \in S(B)$
 := $\exists \forall(x \in A) : (x \notin B)$
 := $C(B'A) \in \emptyset$
 := [$\emptyset := C(B'A) \in \emptyset$]

Def: Complemento de un conjunto A incluido dentro de otro conjunto E (Universo)

$$\begin{array}{l} A \subset E \\ /A \end{array} := \forall(x \in A) : (x \in E)$$

3.9.1.- TEOREMAS DE INCLUSIONES E IMPLICACIONES

Teorema 1 $A \subset B$:= $\forall(x \in A) : (x \in B) \Rightarrow \forall(x \in A) : (x \in A \cap B)$

Teorema 2 **Propiedad Transitiva de la Inclusión (Silogismo)**

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset C \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset C$$

Teorema 3 **Propiedad Transitiva de la Igualdad**

$$\left. \begin{array}{l} A = B \\ B = C \end{array} \right\} \Rightarrow A = C$$

Teorema 4 **Propiedad Transitiva de la Inclusión (Silogismo)**

$$\left. \begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow A \Rightarrow C$$

Teorema 5 **Propiedad Transitiva de la Doble Implicación**

$$\left. \begin{array}{l} A \Leftrightarrow B \\ B \Leftrightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow A \Leftrightarrow C$$

Teorema 11 **Def. Igualdad de Cj** $\Rightarrow \{x \ y\} = \{y \ x\}$

Teorema 12 **Def. Igualdad de Cj** $\Rightarrow \{x \ x\} = \{x\}$

Teorema 13 $\{x \ y\} = \{x\} \Rightarrow x \equiv y$

Teorema 14 $\{x \ y\} = \{z\} \Rightarrow (x \equiv z) \wedge (y \equiv z)$

3.9.2.- TEOREMAS DE INTERSECCIONES COMPLEMENTOS Y UNIONES

Teorema 21 $A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cap B = A$

Teorema 22 $\Rightarrow \quad A \cup B = B$

Teorema 23 *Def* $A \cap B \Rightarrow A \cap B = B \cap A$

Teorema 24 *Def* $A \cup B \Rightarrow A \cup B = B \cup A$

Teorema 31 *Def.* $/A \Rightarrow /(A) = A$

Teorema 32 *Unicidad del complemento*

$A_1 = /A$

$A_2 = /A \quad \Rightarrow \quad A_1 = A_2$

Teorema 33 *Def.* $/A \Rightarrow /E = \emptyset$

Teorema 34 $\Rightarrow \quad /E = \emptyset$

Teorema 35 *Def.* $\emptyset \Rightarrow \forall A \quad \emptyset \subset A$

Teorema 36 $\Rightarrow \quad \emptyset \cap A = \emptyset$

Teorema 37 $\Rightarrow \quad \emptyset \cup A = A$

Teorema 38 $\Rightarrow \quad E \cap A = A$

Teorema 37 $\Rightarrow \quad E \cup A = E$

Teorema 38 $\Rightarrow \quad /A \cap A = \emptyset$

Teorema 39 $\Rightarrow \quad /A \cup A = E$

Teorema 40 $\Rightarrow \quad \{A, /A\} = P(E)$

Teorema 41 $[A \subset B] \Leftrightarrow A \cap /B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad /B \subset /A$

Teorema 42 $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow A \cap /B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad /B \Rightarrow /A$