

NOTAS PARA LOS ALUMNOS DE ANALISIS MATEMATICO III

INTEGRALES DE RIEMANN

Ing. Juan Sacerdoti

Departamento de Matemática

Facultad de Ingeniería

Universidad de Buenos Aires

2002

INDICE

1.- INTEGRAL

1.1.- INTRODUCCIÓN

1.2.- DIFERENTES TIPOS DE INTEGRALES

1.3.- INTEGRAL DE CAUCHY

1.4.- INTEGRAL DE CAUCHY II

1.5.- INTEGRAL DE RIEMANN

1.- INTEGRAL

1.1.- INTRODUCCIÓN

El concepto integral, es uno de los desarrollos básicos del Análisis Matemático.

Sus orígenes se remontan al tiempo de los griegos para resolver problemas aislados de cálculo de áreas y volúmenes. La evolución de la integral pasa por

ANTINOFONTE	(430	AC	Area del círculo)
EUDOXO	(409- 356	AC	Volumen de la pirámide y del cono)
EUCLIDES	(Aprox 300	AC	Elementos: Recopilación de cálculos de Areas y Volúmenes)
ARQUIMEDES	(287- 212	AC	Area de la parábola).
KEPLER	(1571-1640	DC	Volumen de toneles)
GALILEO	(-1638	DC	Integración para la ley de caída de los cuerpos).
CAVALIERI	(1591-1647	DC	Volumen de toneles).

La integral es un número que en su esencia es una suma al límite.

Es un concepto anterior al de derivada. Cuando ésta se desarrolló (circa 1700) permitió avanzar en el cálculo de Integrales por medio de primitivas (Regla de Barrow) que por supuesto no es el único método.

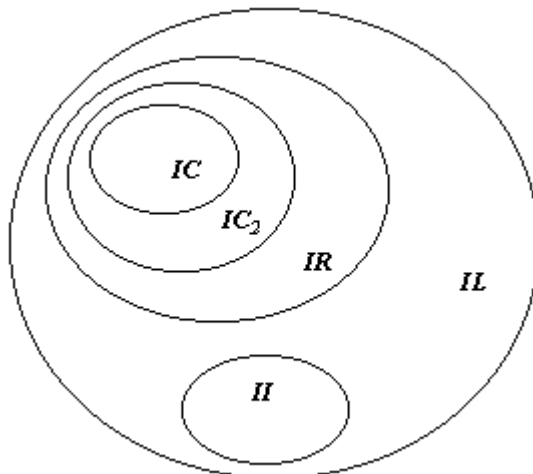
1.2.- DIFERENTES TIPOS DE INTEGRAL

La definición de Integral ha sufrido modificaciones y perfeccionamientos sucesivos para ampliar sus aplicaciones. A las distintas definiciones se las llamará:

- I. Cauchy
- I. Cauchy II
- I. Riemann
- I. Lebesgue

cada una de las cuales incluye como caso particular a las otras, en orden sucesivo.

Las Integrales Impropias, objeto de este estudio en cuanto a su definición, existencia y cálculo, son un caso particular de la Integral de Lebesgue, y extensión de la Integral de Riemann.



Se tratará a continuación las definiciones de integral de Cauchy (I y II) y de Riemann.

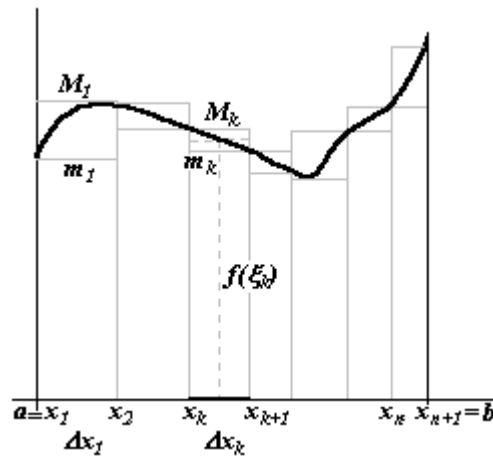
1.3.- INTEGRAL DE CAUCHY (IC)

La integral de Cauchy (IC) es un número real que se obtiene a partir de las hipótesis de que la función f es continua sobre un intervalo acotado $[a,b]$

Para definir el número real que la IC se toma una partición del intervalo $[a,b]$:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

y en cada uno de los elementos de la partición se elige un punto intermedio ξ_k .



La integral de Cauchy se define como el límite de la sumatoria del área de los rectángulos $f(\xi_k) \Delta x_k$ cuando el máximo $\Delta x_k \rightarrow 0$

Def. Integral de Cauchy

$$H_1 \quad d(a,b) < M$$

$$H_2 \quad f \in C[a,b]$$

$$\int_{aIC}^b f(x) dx := \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Obs: Si se desea indicar la variable x la integral se escribe:

$$\int_{aIC}^b f := \int_{aIC}^b f(x) dx$$

pero, nótese que la integral no depende de la variable x ni tampoco de la diferencial dx . La notación clásica con dx sugiere el cálculo de integrales por la Regla de Barrow por Primitivas, que no se puede usar en todos los casos. No olvidar que la Integral es un número que se obtiene por una suma al límite.

Para que la definición de la Integral de Cauchy tenga sentido, debe asegurarse la existencia del límite de la sumatoria que la define. Ello se demuestra a partir de la continuidad de la función sobre un intervalo acotado.

T.- $H_1 \quad d(a,b) < M$

$$H_2 \quad f \in C[a,b] \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

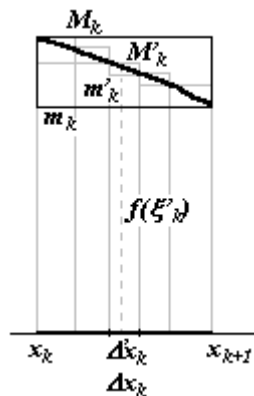
D.- Llamando M_k, m_k a los extremos superior e inferior de f en el intervalo x_k, x_{k+1} estos siempre existen por la continuidad de f en un intervalo acotado:

$$f \in C[a,b] \quad \Rightarrow \quad \exists M_k := \sup f[x_k, x_{k+1}] \quad \exists m_k := \inf f[x_k, x_{k+1}]$$

Se acota entonces:

$$s_0 := \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k =: S_0$$

Tomando una nueva partición que subdivide la anterior:



en cada subintervalo existen nuevos extremos que cumplen

$$m_k \leq m'_k \leq f(\xi'_k) \leq M'_k \leq M_k$$

entonces resulta

$$s_0 := \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k =: S_0$$

$$s_1 := \sum_{k=1}^n m'_k \Delta' x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi'_k) \Delta' x_k \leq \sum_{k=1}^n M'_k \Delta' x_k =: S_1$$

repetiendo el proceso con particiones sucesivas se pueden formar dos sucesiones s_p y S_p

$$\dots \leq \dots \leq \dots$$

$$s_p := \sum_{k=1}^n m^{(p)}_k \Delta^{(p)} x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi^{(p)}_k) \Delta^{(p)} x_k \leq \sum_{k=1}^n M^{(p)}_k \Delta^{(p)} x_k =: S_p$$

Las dos sucesiones cumplen

$$s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq s_{p+1} \leq S_{p+1} \leq S_p \leq \dots \leq S_1 \leq S_0$$

Es decir s_p es monótona no decreciente, acotada superiormente por S_0 y

S_p es monótona no creciente, acotada inferiormente por s_0

Por el teorema de Weierstrass ambas tienen límite

$$s_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} s$$

$$S_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} S$$

Ambos límites son iguales porque

$$S_p - s_p = \sum_{k=1}^n (M_k^{(p)} - m_k^{(p)}) \Delta^{(p)} x_k$$

Una función continua sobre un intervalo acotado cumple

$$f \in C[a,b] \Rightarrow |M_k^{(p)} - m_k^{(p)}| < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$S_p - s_p = \sum_{k=1}^n (M_k^{(p)} - m_k^{(p)}) \Delta^{(p)} x_k < \sum_{k=1}^n \varepsilon \Delta^{(p)} x_k = \varepsilon(b-a)$$

Lo cual lleva a que los dos límites son iguales

$$S = s$$

Y por lo tanto las sucesiones S_p y s_p definen un número real que es $S = s$. De esto se deduce que por la acotación

$$s_p := \sum_{k=1}^n m_k^{(p)} \Delta^{(p)} x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k^{(p)}) \Delta^{(p)} x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k^{(p)} \Delta^{(p)} x_k =: S_p$$

existe el límite de la sumatoria

$$\exists \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = s = S$$

número real que define a la Integral de Cauchy.

1.4.- INTEGRAL DE CAUCHY II

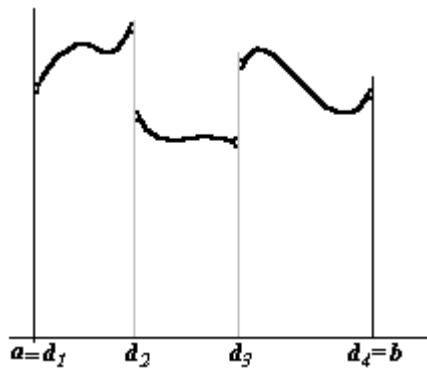
La integral de Cauchy se extiende fácilmente para el caso de funciones continuas por partes.

Dada una función real f se dice que es continua por partes o por tramos sobre un intervalo $[a, b]$ cuando tiene una cantidad finita de discontinuidades de salto finito

Def. Función Continua por partes

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x)$$

$$f \in CP/[a, b] := \begin{cases} f \in C/[a, b] - \{s_i\} & i \in \langle 1..n \rangle \\ \exists f(x^+), f(x^-) & |f(x^+) - f(x^-)| < M \end{cases}$$



La Integral para este tipo de funciones se define como la suma finita de integrales de Cauchy del tipo I.

Def. Integral de Cauchy II para funciones Continuas por partes.

$$H_1 \quad d(a, b) < M$$

$$H_2 \quad f \in CP/[a, b]$$

$$\int_{a, IC2}^b f(x) dx := \sum_{i=1}^n \int_{d_i, IC}^{d_{i+1}} f(x) dx$$

1.5.- INTEGRAL DE RIEMANN

Una nueva extensión del concepto de integral se obtiene ampliando la hipótesis general al caso de funciones acotadas, manteniendo el intervalo finito (acotado).

Con la acotación de la función puede reproducirse el proceso realizado en la demostración de la existencia de la IC salvo el caso que no pueda asegurarse que $s = S$.

Partiendo de:

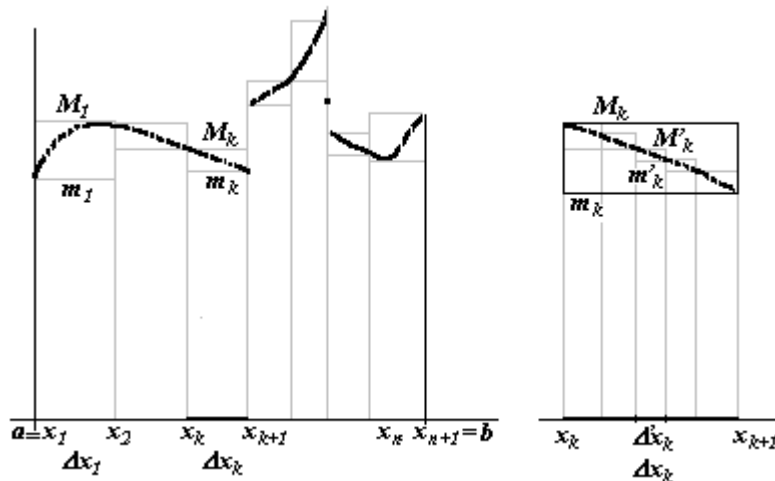
$$H_1 \quad d(a,b) < M_1$$

$$H_2 \quad |f| < M_2$$

Se vuelve a reproducir el análisis hecho para demostrar la existencia de IC

Se toma una partición del intervalo [a,b]:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$



Llamando M_k, m_k a los extremos superior e inferior de f en el intervalo x_k, x_{k+1} estos siempre existen por la acotación de f en $[a, b]$

$$|f| < M_2 \Rightarrow \exists M_k := \sup f/[x_k, x_{k+1}] \quad \exists m_k := \inf f/[x_k, x_{k+1}]$$

Se acota entonces:

$$s_0 := \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k =: S_0$$

Tomando una nueva partición que subdivida la anterior: en cada subintervalo existen nuevos extremos que cumplen

$$m_k \leq m'_k \leq M'_k \leq M_k$$

entonces resulta

$$\begin{aligned}
s_0 &:= \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k =: S_0 \\
&\leq \\
s_1 &:= \sum_{k=1}^n m'_k \Delta' x_k \leq \sum_{k=1}^n M'_k \Delta' x_k =: S_1
\end{aligned}$$

repetiendo el proceso con particiones sucesivas se pueden formar dos sucesiones s_p y S_p

$$\begin{aligned}
&\dots \\
&\leq \\
s_p &:= \sum_{k=1}^n m^{(p)}_k \Delta^{(p)} x_k \leq \sum_{k=1}^n M^{(p)}_k \Delta^{(p)} x_k =: S_p
\end{aligned}$$

Las dos sucesiones cumplen

$$s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq s_{p+1} \leq S_{p+1} \leq S_p \leq \dots \leq S_1 \leq S_0$$

Es decir s_p es monótona no decreciente, acotada superiormente por S_0 y

S_p es monótona no creciente, acotada inferiormente por s_0

Por el teorema de Weierstrass ambas tienen límite

$$\begin{aligned}
s_p &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} s \\
S_p &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} S
\end{aligned}$$

Aquí no se puede probar que los dos límites s y S sean iguales: pero como

$$\forall p \quad S_p - s_p \geq 0$$

solamente se puede asegurar:

$$s \leq S$$

Entonces en el caso que se cumpla la Igualdad $s = S$ existe un número real que es por definición la Integral de Riemann

Def. Integral de Riemann

$$H_1 \quad d(a,b) < M_1$$

$$H_2 \quad |f| < M_2$$

$$H_3 \quad s = S$$

$$\int_{IR} f(x) dx := s = S$$

Obs.1: Los valores s y S se llaman Integrales de Darboux inferior y superior respectivamente y se simbolizan como:

$$\int_{\inf D_i}^b f(x) dx := s \quad \int_{\inf D_s}^b f(x) dx := S$$

Las integrales de Darboux siempre existen. Entonces la Integral de Riemann existe cuando ambas Integrales de Darboux son iguales.

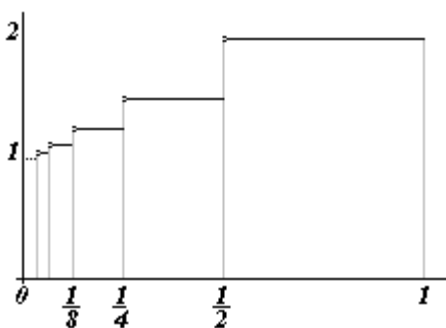
Es obvio a partir del análisis del desarrollo hecho para la de IR que las funciones integrables según la definición de Cauchy ($f \in C$) y según Cauchy II ($f \in CP$) también son IR.

Algunos ejemplos de análisis de IR son:

Ejemplo 1. Un ejemplo de una función con infinitas discontinuidades ($f \notin CP$) y que es integrable según Riemann:

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow 1 + \frac{1}{2^n} \quad x \in] \frac{1}{2^{n+1}} \quad \frac{1}{2^n}] \quad n \in \mathbb{N}$$



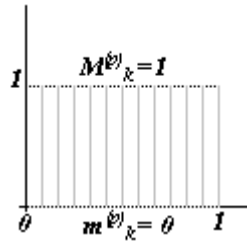
$$\int_{\inf IR} f = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Este es un ejemplo donde la integral se calcula sin hacer uso del concepto de derivada, lo cual confirma la independencia de los conceptos.

Ejemplo 2. Un ejemplo donde no existe IR. La función se llama de Dirichlet:

Dirichlet: $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



La función de Dirichlet (que en realidad no puede representarse) tiene, cualquiera sea la partición que se tome:

$$s_p := \sum_{k=1}^n m^{(p)}_k \Delta x_k = 0 \quad S_p := \sum_{k=1}^n M^{(p)}_k \Delta x_k = 1$$

Por lo tanto: $s = 0$ $S = 1$

Las integrales de Darboux que siempre existen son distintas y por lo tanto no existe la Integral de Riemann.