

NOTAS PARA LOS ALUMNOS DEL CURSO DE ANALISIS MATEMATICO III

FUNCIONES EULERIANAS

Ing. Juan Sacerdoti

Departamento de Ingeniería

Universidad de Buenos Aires

2002

V 2.02

INDICE

1.- FUNCIÓN GAMMA: EULERIANA DE SEGUNDA ESPECIE

1.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE Γ

1.1.1.- DEFINICIÓN

1.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANALISIS DE CV DE LA II

1.1.3.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: UNICIDAD DE LA RELACIÓN Γ SOBRE \mathbb{R}^+

1.1.4.- CONTINUIDAD DE Γ SOBRE \mathbb{R}^+

1.2.- OTRA FORMA DE Γ

1.3.- PROPIEDADES DE Γ

1.3.1.- FÓRMULA DE RECURRENCIA

1.3.2.- FÓRMULA DE RECURRENCIA GENERALIZADA

1.3.3.- VALORES NOTABLES $\Gamma(1) = 1$

1.3.4.- VALORES NOTABLES $\Gamma(n+1) = n!$

1.3.5.- VALORES NOTABLES $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

1.3.6.- VALORES NOTABLES $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ FÓRMULA DE DUPLICACIÓN PARA $n \in \mathbb{N}$

1.3.7.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $\mathbb{V}(0^+)$

1.3.8.- MÍNIMO DE Γ EN \mathbb{R}^+

1.3.9.- RESUMEN DE PROPIEDADES

1.4.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES REALES POSITIVOS

1.5.- REPRESENTACIÓN GRAFICA DE Γ (PRIMERA DEFINICIÓN)

1.6. DERIVADA DE LA FUNCIÓN Γ

1.7. PROPIEDADES DE Γ'

1.7.1.- FÓRMULA DE RECURRENCIA Γ'

1.7.2.- FÓRMULA DE RECURRENCIA GENERALIZADA Γ'

1.7.3.- VALORES NOTABLES $\Gamma'(1)$

1.7.4.- VALORES NOTABLES $\Gamma'(n+1)$

1.7.5.- RESUMEN DE PROPIEDADES DE Γ'

1.8.- SEGUNDA DEFINICIÓN DE Γ

1.8.1.- DEFINICIÓN

1.9.- PROPIEDADES DE Γ (SEGUNDA PARTE)

1.9.1.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $\mathbb{V}(0^-)$

1.9.2.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $\mathbb{V}(-k)$

1.9.3.- LÍMITE DE $\Gamma(p+1-v)/\Gamma(1-v)$

1.10.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES DE $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$

1.11.- DEFINICIÓN DE $1/\Gamma$ SEGUNDA DEFINICIÓN

1.12.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE Γ Y DE $1/\Gamma$ (SEGUNDA DEFINICIÓN)

1.13.- TERCERA DEFINICIÓN DE Γ

1.13.1.- DEFINICIÓN

1.13.2.- ANÁLISIS DEL DOMINIO DE LA TERCERA DEFINICIÓN DE Γ

1.14.- PROPIEDADES DE Γ (TERCERA DEFINICIÓN)

1.14.1.- HOLOMORFIA

1.15.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES DE $C - \mathbb{Z}^- - \{0\}$

1.16.- DEFINICIÓN DE $1/\Gamma$ (TERCERA DEFINICIÓN)

2.- FUNCIÓN BETA: EULERIANA DE PRIMERA ESPECIE

2.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE B

2.1.1.- DEFINICIÓN

2.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANÁLISIS DE CV DE LA II

2.2.- OTRAS FORMAS DE B

2.2.1.- SEGUNDA FORMA DE B

2.2.2.- TERCERA FORMA DE B

2.2.3.- CUARTA FORMA DE B

2.3.- PROPIEDADES DE B

2.3.1.- REDUCCIÓN DE B A Γ

2.3.2.- SIMETRÍA DE B

2.3.3.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS

2.3.4.- EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS

2.3.5.- RELACIÓN CON LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

2.3.6.- FÓRMULA DE DUPLICACIÓN PARA R^+

2.4.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE B (PRIMERA DEFINICIÓN)

2.5.- SEGUNDA DEFINICIÓN DE B

2.5.1.- DEFINICIÓN

2.6.- OTRAS PROPIEDADES DE B Y Γ

2.6.1.- OTRA FORMA DE Γ (TERCERA FORMA)

2.6.2.- VALORES NOTABLES $\Gamma'(\frac{1}{2})$

2.7.- TERCERA DEFINICIÓN DE B

2.7.1.- DEFINICIÓN

2.7.2.- ANÁLISIS DEL DOMINIO DE LA TERCERA DEFINICIÓN DE B * (no hecho)**

2.8.- FUNCIÓN DIGAMMA* (no hecho ver Castagnetto)**

3.- FUNCIÓN GAMMA INCOMPLETA

3.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE Γ INCOMPLETA

3.1.1.- DEFINICIÓN

APENDICE I

1.5.1.- TABLA DE LA FUNCIÓN GAMMA

APENDICE II

1.7.3.1.- VALOR DE LA CONSTANTE DE EULER (CÁLCULO NUMÉRICO)

APENDICE III

2.3.3.2.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

2.3.3.3.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: TERCERA DEMOSTRACIÓN

2.3.3.4.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: CUARTA DEMOSTRACIÓN

1.- FUNCIÓN GAMMA: FUNCIÓN EULERIANA DE SEGUNDA ESPECIE

Existen varias definiciones de la función Γ a partir de sucesivas extensiones del Dominio, a saber:

$$D = \mathbf{R}^+$$

$$D = \mathbf{R} - \mathbf{Z}^- - \{0\}$$

$$D = \mathbf{C} - \mathbf{Z}^- - \{0\}$$

Que se desarrollarán a lo largo del texto.

1.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE Γ

1.1.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma Γ (en su primera definición sobre el dominio \mathbf{R}^+) o Función Euleriana de Segunda Especie:

Definición de Γ (Primera): $\Gamma: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$

$$\alpha \rightarrow \Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

Obs.: La justificación de que Γ es efectivamente una función y de que su dominio es \mathbf{R}^+ , se obtiene del análisis de convergencia y unicidad que siguen.

1.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANALISIS DE CV DE LA II

Se analiza la CV de la II anterior para justificar la definición.

1.- Existencia de la función integrando, salvo para puntos singulares aislados y puntos singulares de la Integral Impropia:

$$\exists f: \quad \forall x \in]0, A[\quad \exists e^{-x} x^{\alpha-1}$$

p.s. $V_{+\infty}$

$$V_{0+} \quad \forall \alpha < 1$$

2.- Existencia de la Integral de Riemann sobre el Intervalo de Integración excluyendo los vecinales de los puntos singulares:

$$\int_a^A e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in \mathbf{IR} \iff f \in C[a, A] : a > 0$$

3.1. Análisis de CV en $V_{+\infty}$: se compara con $1/x^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{1/x^2} = \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{V_{+\infty}} \frac{1}{x^2} dx \in CV \quad [\text{Tabla 1}] \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{V_{+\infty}} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in CV \quad \forall \alpha$$

3.2.- Análisis de CV en V_{0+} : se compara con $x^{\alpha-1}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} &= \frac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{1/x^{1-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1 \\ \int_{V_{0+}} \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx &\in CV \Leftrightarrow 1-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0 \quad [\text{Tabla 2}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

4.- Resumen de CV

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

1.1.3.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: UNICIDAD DE LA RELACIÓN Γ SOBRE R^+

La Relación Γ sobre R^+ es unívoca (y por lo tanto es una función) hecho que se deduce a partir de la unicidad de la Integral de Riemann y la unicidad del Límite siguiente:

$$\Gamma(\alpha) := \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ a \rightarrow 0+}} \int_a^A e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

1.1.4.- CONTINUIDAD DE Γ SOBRE R^+

$$T.- \text{Def } \Gamma \Rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in C/R^+$$

Toda Integral de función continua es continua.

1.2.- OTRAS FORMAS DE Γ

Otras formas de la función Γ se obtienen por medio de cambios de variables. Por ejemplo:

T.- Segunda Forma de Γ

$$\text{Def } \Gamma \Rightarrow \Gamma(\alpha) = \int_0^1 [L(\frac{1}{y})]^{\alpha-1} dy$$

Tomando $y > 0$ se hace el cambio de variable

$$y > 0 \quad e^{-x} = y \Leftrightarrow x = L(\frac{1}{y})$$

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow y = 1 \\ x \rightarrow +\infty &\rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

$$dx = -\frac{1}{y} dy$$

Resulta

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 [L(\frac{1}{y})]^{\alpha-1} dy$$

1.3.- PROPIEDADES DE Γ

1.3.1.- FÓRMULA DE RECURRENCIA

$$T_1.- \text{Def } \Gamma \Rightarrow \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha dx \\ &= -e^{-x} x^\alpha \Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \\ &\xrightarrow{\alpha > 0} \alpha \Gamma(\alpha)\end{aligned}$$

Obs.: No olvidar que $\alpha > 0$

1.3.2.- FÓRMULA DE RECURRENCIA GENERALIZADA

$$\begin{aligned}T_2.- \text{Def } \Gamma \Rightarrow \Gamma(\alpha+k+1) &= (\alpha+k)(\alpha+k-1)(\alpha+k-2) \dots (\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha) \\ \Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha)} &= \prod_{j=0}^k (\alpha+j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+k+1) &= (\alpha+k) \Gamma(\alpha+k) \\ &= (\alpha+k) (\alpha+k-1) \Gamma(\alpha+k-1) \\ &= (\alpha+k) (\alpha+k-1) (\alpha+k-2) \Gamma(\alpha+k-2) \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)(\alpha+k-1)(\alpha+k-2) \dots (\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha)$$

O también

$$\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha)} = \prod_{j=0}^k (\alpha+j)$$

1.3.3.- VALORES NOTABLES $\Gamma(1) = 1$

$$T_3.- \text{Def } \Gamma \Rightarrow \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(1) := \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

1.3.4.- VALORES NOTABLES $\Gamma(n+1) = n!$

$$T_4.- \text{Def } \Gamma \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

Aplicando la Fórmula de recurrencia generalizada

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \Gamma(1) = n!$$

Obs.: Nótese que la función Γ es una extensión a \mathbb{R}^+ de los factoriales naturales $n!$. Por lo tanto se verifica que $\Gamma(1) = 0!$

1.3.5.- VALORES NOTABLES $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

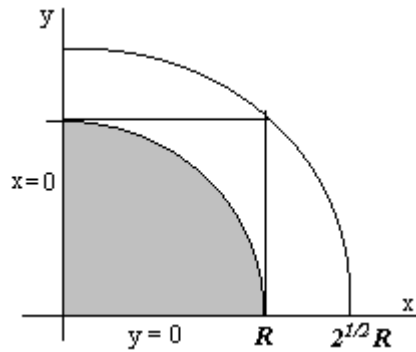
T₅.- Def $\Gamma \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Previamente se demuestra

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$I^2 = \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right] \left[\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right]$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$



Tomando la integral doble antes de pasar al límite

$$\int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Por ser la función integrando positiva, se puede acotar

$$\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^{1/2}-x^{1/2}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_0^{2^{1/2}R} \int_0^{\sqrt{2R^{1/2}-x^{1/2}}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Cambiando a coordenadas polares las integrales de los extremos:

$$\int_0^R \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi \leq \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \int_0^{2^{1/2}R} \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi$$

$$\frac{1}{2} \pi \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \leq \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \frac{1}{2} \pi \int_0^{2^{1/2}R} e^{-\rho^2} \rho d\rho$$

$$-\frac{1}{4} \pi e^{-\rho^2} \Big|_0^R \leq \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq -\frac{1}{4} \pi e^{-\rho^2} \Big|_0^{2^{1/2}R}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \leq & \downarrow \\ \frac{1}{4} \pi & \leq & I^2 \leq \frac{1}{4} \pi \end{array}$$

Es decir:

$$I^2 = \frac{1}{4} \pi$$

$$\Gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

1.3.6.- VALORES NOTABLES $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ **FÓRMULA DE DUPLICACIÓN PARA $n \in \mathbb{N}$**

$$\begin{aligned} T_6.- \text{ Def } \Gamma &\Rightarrow \Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^n} (2n - 1)(2n - 3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \quad \text{Fórmula de Duplicación para } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por la fórmula de recurrencia se induce

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

...

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

fórmula que también puede expresarse

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{2^n} (2n - 1)(2n - 3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

o también una tercera forma que es la Fórmula de Duplicación para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2^{2n} n!} 2n(2n - 1)(2n - 3) \dots 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

1.3.7.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $V(0^+)$

$$T_7.- \text{ Def } \Gamma \Rightarrow \alpha \in V(0^+) \quad \Gamma(\alpha) \cong \frac{1}{\alpha}$$

La función Γ se comporta como la hipérbola $\frac{1}{\alpha}$ en el $V(0^+)$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} = \Gamma(\alpha + 1) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 1$$

1.3.8.- MÍNIMO DE Γ EN \mathbb{R}^+

T_8 - Def $\Gamma \Rightarrow \exists \xi = \alpha_{\min} \in [1, 2]$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx > 0$$

$$\Gamma(\alpha) \in C/\mathbb{R}^+$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

Por el Teorema de Rolle:

$$\Rightarrow \exists \xi \in [1, 2] : \Gamma'(\xi) = 0$$

Obs.: La abscisa del mínimo es $\alpha_{\min} = 1,461\ 63 \dots$ y la ordenada $\Gamma(\alpha_{\min}) = 0,885\ 60\dots$

1.3.9.- RESUMEN DE PROPIEDADES

Def $\Gamma \Rightarrow T_1 \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad \text{Fórmula de recurrencia}$

$\Rightarrow T_2 \quad \Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)(\alpha+k-1)(\alpha+k-2) \dots (\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha)$

Fórmula de recurrencia generalizada

$\Rightarrow T_3 \quad \Gamma(1) = 1$

$\Rightarrow T_4 \quad \Gamma(n+1) = n!$

$\Rightarrow T_5 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\Rightarrow T_6 \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

$$= \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$$

Fórmula de Duplicación para $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow T_7 \quad \alpha \in V(0^+) \Rightarrow \Gamma(\alpha) \equiv \frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow T_8 \quad \exists \xi = \alpha_{\min} \in [1, 2]$

1.4.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES REALES POSITIVOS

A partir del T_4 se justifica tomar a la función Γ como extensión del factorial sobre \mathbf{R}^+ . Se define entonces

Def.: $\alpha! := \Gamma(\alpha+1)$

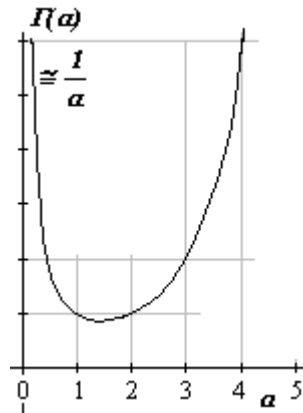
En particular

$0! := \Gamma(1) = 1$

Obs.: La notación de factorial se extenderá a medida que se extiende la definición de Γ .

1.5.- REPRESENTACIÓN GRAFICA DE Γ (PRIMERA DEFINICIÓN)

La gráfica de la función Γ para $\alpha > 0$ es:



1.6.- DERIVADA DE LA FUNCIÓN Γ

Como se probará sobre el intervalo real $0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ existe la Derivada de la función Γ cuya representación es:

Def $\Gamma \Rightarrow \Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x \, dx \quad \forall \alpha \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$

Se recuerda que para cambiar el orden de derivación en una integral impropia es suficiente que se cumpla:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \quad f \in CP / t, \alpha \\ H_2 \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} \in CP / t, \alpha \\ H_3 \quad \int_{J^{+\infty}} f \in CV \\ H_4 \quad \int_{J^{+\infty}} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \in CU \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{J^{+\infty}} f(t, \alpha) \, dt = \int_{J^{+\infty}} \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} \, dt$$

Las Hipótesis H_1 y H_3 se cumplen:

Derivando bajo el signo integral se tiene:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \ln x \, dx$$

se comprueba que se cumple H_2 . Falta verificar H_4 .

Empezando en $V_{+\infty}$ el análisis de la CU

$$V_{+\infty} \text{ :- } \forall \alpha \leq \alpha_2 \quad x^{\alpha-1} \leq x^{\alpha_2-1}$$

$$\left| \int_{V_{+\infty}} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx \right| = \left| \int_{V_{+\infty}} e^{-x} x^{\alpha-1} Lx dx \right|$$

$$\leq \left| \int_{V_{+\infty}} e^{-x} x^{\alpha_2-1} Lx dx \right|$$

Esta última CV en $V_{+\infty}$ pues comparando con $1/x^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e^{-x} x^{\alpha_2-1} Lx}{1/x^2} = \frac{x^{\alpha_2+1} Lx}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{V_{+\infty}} \frac{1}{x^2} dx \in CV \quad [\text{Tabla 1}] \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{V_{+\infty}} e^{-x} x^{\alpha_2-1} Lx dx \in CV \quad \forall \alpha \leq \alpha_2$$

En consecuencia por el Teorema de Weierstrass

$$\Rightarrow \int_{V_{+\infty}} e^{-x} x^{\alpha-1} Lx dx \in CU \quad \forall \alpha \leq \alpha_2$$

$$V_{0+} \text{ :- } \forall \alpha \geq \alpha_1 \quad x^{\alpha-1} \leq x^{\alpha_1-1}$$

$$\left| \int_{V_{0+}} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx \right| = \left| \int_{V_{0+}} e^{-x} x^{\alpha-1} Lx dx \right|$$

$$\leq \left| \int_{V_{0+}} e^{-x} x^{\alpha_1-1} Lx dx \right|$$

En V_{0+} se compara con x^{α_1-1}

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e^{-x} x^{\alpha-1} Lx}{x^{\alpha_1-1}} = \frac{e^{-x} x^{\alpha-1} Lx}{1/x^{1-\alpha_1}} = e^{-x} x^{\alpha-\alpha_1} Lx \xrightarrow[\alpha > \alpha_1]{x \rightarrow 0+} 0 \\ \int_{V_{0+}} \frac{1}{x^{1-\alpha_1}} dx \in CV \Leftrightarrow 1-\alpha_1 < 1 \Leftrightarrow \alpha_1 > 0 \quad [\text{Tabla 2}] \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-x} x^{\alpha_1-1} Lx dx \in CV \Leftrightarrow \alpha_1 > 0$$

En consecuencia por el Teorema de Weierstrass

$$\Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-x} x^{\alpha-1} Lx dx \in CU \quad \forall \alpha \geq \alpha_1 > 0$$

En resumen

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} Lx dx \in CU \quad \forall \alpha \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$$

Por lo tanto es válido aplicar la Tesis del teorema enunciado

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{+\infty} f(t, \alpha) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx$$

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} Lx dx \quad \forall \alpha \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$$

1.7. PROPIEDADES DE Γ'

1.7.1.- FÓRMULA DE RECURRENCIA DE Γ'

$$T_{1.-} \text{ Def } \Gamma \Rightarrow \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Derivando en forma logarítmica la Fórmula de recurrencia de Γ

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

1.7.2.- FÓRMULA DE RECURRENCIA GENERALIZADA Γ'

$$T_{2.-} \text{ Def } \Gamma \Rightarrow \frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \dots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Derivando en forma logarítmica la Fórmula de Recurrencia de Γ

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)(\alpha+k-1)(\alpha+k-2) \dots (\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha)$$

se obtiene la Fórmula de Recurrencia de Γ'

$$\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \dots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

1.7.3.- VALORES NOTABLES $\Gamma'(1)$

$$T_{3.-} \text{ Def } \Gamma \Rightarrow \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -0.577 2... = -\gamma \quad (\gamma \text{ Constante de Euler})$$

Por cálculo numérico se obtiene el valor $\Gamma'(1) = -0.577 215 664 990 \dots$ que es el opuesto de la constante de Euler (se supone que es un número irracional)

1.7.4.- VALORES NOTABLES $\Gamma'(n+1)$

$$T_{4.-} \text{ Def } \Gamma \Rightarrow \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = H(n) + \Gamma'(1)$$

En la expresión de recurrencia de Γ'

$$\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \dots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

tomando $\alpha = 1$ y $k = n - 1$ queda

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

definiendo la Suma Armónica de n términos

$$H(n) := \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} + 1$$

$$H(0) := 0$$

Resulta:

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = H(n) + \Gamma'(1)$$

1.7.5.- RESUMEN DE PROPIEDADES DE Γ

$$\text{Def } \Gamma \quad \Rightarrow T_1 \quad \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{Fórmula de recurrencia de } \Gamma$$

$$\Rightarrow T_2 \quad \frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \dots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Fórmula de recurrencia generalizada de Γ

$$\Rightarrow T_3 \quad \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -0.5772\dots = -\gamma \quad (\gamma: \text{Constante de Euler})$$

$$\Rightarrow T_4 \quad \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = H(n) + \Gamma'(1)$$

1.8.- SEGUNDA DEFINICIÓN DE Γ

La segunda definición de la función Γ se hace para extender la primera definición al dominio \mathbf{R} que en rigor será $D = \mathbf{R} - \mathbf{Z}^- - \{0\}$

Para los reales negativos se extiende por definición la validez de la Fórmula de Recurrencia

1.8.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma Γ (en su segunda definición) o Función Euleriana de Segunda Especie:

Definición de Γ (segunda): $\Gamma: \mathbf{R} - \mathbf{Z}^- - \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\alpha \rightarrow \Gamma(\alpha) := \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx & \alpha > 0 \\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) & \alpha < 0 \end{cases}$$

1.9.- PROPIEDADES DE Γ (SEGUNDA PARTE)

Se analiza por la Fórmula de Recurrencia el comportamiento de la función para los reales negativos y el cero.

1.9.1.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $V(0^-)$

$$\begin{aligned} T_9\text{- Def } \Gamma(\text{segunda definición}) &\Rightarrow \alpha \in]-1 \ 0[\Rightarrow \Gamma(\alpha) < 0 \\ &\Rightarrow \alpha \in V(0^-) \Rightarrow \Gamma(\alpha) \cong \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Partiendo de

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha+1)$$

$$\text{si } \alpha \in]-1 \ 0[\Rightarrow \Gamma(\alpha) < 0$$

Por otra parte la función Γ se también se comporta como la hipérbola $\frac{1}{\alpha}$ en el $V(0^-)$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} = \Gamma(\alpha+1) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^-} 1$$

Esta propiedad se puede extender:

1.9.2.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $V(-k)$

$$\begin{aligned} T_{10}\text{- Def } \Gamma(\text{segunda definición}) &\Rightarrow \alpha \in]-1 \ 0[\Rightarrow \Gamma(\alpha) < 0 \\ &\Rightarrow \alpha \in]-2 \ -1[\Rightarrow \Gamma(\alpha) > 0 \\ &\dots \\ &\Rightarrow \alpha \in]-(k+1) \ -k[\Rightarrow \text{sg}(\Gamma(\alpha)) = (-1)^k \\ &\Rightarrow \alpha \in V(0^-) \ \Gamma(\alpha) \cong \frac{1}{\alpha} \\ &\Rightarrow \alpha \in V(-1) \ \Gamma(\alpha) \cong -\frac{1}{\alpha+1} \\ &\dots \\ &\Rightarrow \alpha \in V(-k) \ \Gamma(\alpha) \cong \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\alpha+k} \end{aligned}$$

Partiendo de

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha+2)$$

si $\alpha \in]-2, -1[\Rightarrow \Gamma(\alpha) > 0$

La función Γ se también se comporta como la hipérbola $\frac{1}{\alpha+1}$ en el $V(-1)$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha+2) \xrightarrow{\alpha \rightarrow -1} -1$$

Generalizando de

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha+k} \frac{1}{\alpha+k-1} \frac{1}{\alpha+k-2} \dots \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha+k+1)$$

si $\alpha \in]-(k+1), -k[\Rightarrow \text{sg}(\Gamma(\alpha)) = (-1)^k$

La función Γ se también se comporta como la hipérbola $\frac{1}{\alpha+k}$ en el $V(-k)$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha+k}} = \frac{1}{\alpha+k-1} \frac{1}{\alpha+k-2} \dots \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha+k+1) \xrightarrow{\alpha \rightarrow -k} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1.9.3.- LÍMITE DE $\Gamma(p+1-v)/\Gamma(1-v)$

T₁₀-

$$\left. \begin{array}{l} \text{Def } \Gamma(\text{segunda definición}) \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Gamma(p+1-v)}{\Gamma(1-v)} \xrightarrow{v \rightarrow n} \frac{\Gamma(p+1-n)}{\Gamma(1-n)} \quad n \in \langle -\infty, 0 \rangle$$

$$\xrightarrow{v \rightarrow n} 0 \quad n \in \langle 1, p \rangle$$

$$\xrightarrow{v \rightarrow n} (-1)^p \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-p)} \quad n \in \langle p+1, +\infty \rangle$$

D.-

$$\frac{\Gamma(p+1-v)}{\Gamma(1-v)} = (p-v)(p-1-v)(p-2-v)\dots(2-v)(1-v) \xrightarrow{v \rightarrow n} \frac{\Gamma(p+1-n)}{\Gamma(1-n)} \quad n \in \langle -\infty, 0 \rangle$$

$$\xrightarrow{v \rightarrow n} 0 \quad n \in \langle 1, p \rangle$$

$$\frac{\Gamma(p+1-v)}{\Gamma(1-v)} = (-1)^p (v-p)(v-(p-1))(v-(p-2))\dots(v-2)(v-1)$$

$$= (-1)^p \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(v-p)} \xrightarrow{v \rightarrow n} (-1)^p \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-p)} \quad n \in \langle p+1, +\infty \rangle$$

1.10.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES DE $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$

La notación de factorial se puede extender sobre $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$ con la segunda definición de Γ . Se define entonces:

Def.: $\alpha! := \Gamma(\alpha+1) \quad \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$

1.11.- DEFINICIÓN DE $1/\Gamma$ SEGUNDA DEFINICIÓN

La función Gamma $1/\Gamma$ (en su segunda definición) se puede definir sobre todos los reales. En efecto tomando para los valores de $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ el valor del límite que es 0 :

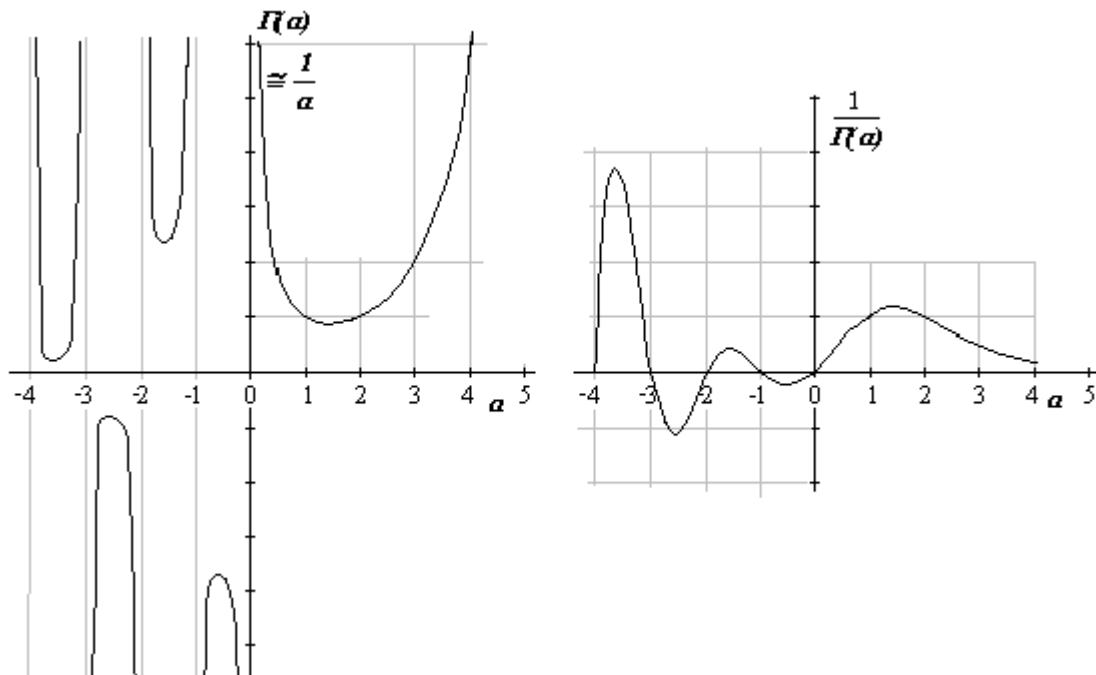
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -k} 0$$

Definición: $1/\Gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\alpha \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} & \alpha \neq \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \\ 0 & \alpha = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \end{cases}$$

1.12.- REPRESENTACIÓN GRAFICA DE Γ Y DE $1/\Gamma$ SEGUNDA DEFINICIÓN

Las gráficas de las funciones Γ y $1/\Gamma$ para $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\} > 0$ es:



1.13.- TERCERA DEFINICIÓN DE Γ

La segunda definición de la función Γ se hace para extender la segunda definición sobre el dominio $\mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$ al dominio $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$

Para los reales negativos se extiende por definición la validez de la Fórmula de Recurrencia

1.13.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma Γ (en su tercera definición) Euleriana de Segunda Especie:

Definición de Γ (tercera):

$$\Gamma: \mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow \Gamma(z) := \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt & z \in \mathbb{C} \wedge \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) & \operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge z \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \end{cases}$$

1.13.2.- ANÁLISIS DEL DOMINIO DE LA TERCERA DEFINICIÓN DE Γ

Se analiza por la Fórmula de Recurrencia el comportamiento de la función Γ (tercera definición) en los complejos para los valores enteros negativos y el cero.

En forma análoga a lo demostrado para la segunda definición de Γ

$$\begin{aligned} T_{11} \quad \text{Def } \Gamma(\text{tercera definición}) &\Rightarrow z \in V(0) & \Gamma(z) &\cong \frac{1}{z} \\ &\Rightarrow z \in V(-1) & \Gamma(z) &\cong \frac{1}{z+1} \\ &\dots \\ &\Rightarrow z \in V(-k) & \Gamma(z) &\cong \frac{1}{z+k} \end{aligned}$$

1.14.- PROPIEDADES DE Γ (Tercera Definición)

1.14.1.- HOLOMORFÍA

T_{11} Def Γ (tercera definición) $\Rightarrow \Gamma(z) \in H/C - Z^- - \{0\}$

La integral que define $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ sobre $z \in C \wedge \text{Re}(z) > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &:= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+iy-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} t^{iy} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iyLt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y Lt) + i \sin(y Lt)] dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \cos(y Lt) dt + i \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \sin(y Lt) dt \end{aligned}$$

Llamando

$$u(x, y) := \text{Re}(\Gamma(z)) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \cos(y Lt) dt$$

$$v(x, y) := \text{Im}(\Gamma(z)) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \sin(y Lt) dt$$

Ambas integrales cumplen con las hipótesis del teorema que da condiciones suficientes para cambiar el orden entre derivación e integral impropia:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \quad f \in CP/t, \alpha \\ H_2 \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} \in CP/t, \alpha \\ H_3 \quad \int_{+\infty} f \in CV \\ H_4 \quad \int_{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \in CU \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{+\infty} f(t, \alpha) dt = \int_{+\infty} \frac{\partial f(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt$$

derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \cos(y Lt) Lt dt \\ -\frac{\partial u}{\partial y} &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \sin(y Lt) Lt dt \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \sin(y Lt) Lt dt \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \cos(y Lt) Lt dt \end{aligned}$$

se cumplen las condiciones de Cauchy Riemann y siendo además las derivadas continuas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \in C/x,y$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \in C/x,y$$

la función es Holomorfa

$$\Gamma(z) \in H/[z \in \mathbb{C} \wedge \operatorname{Re}(z) > 0]$$

que se extiende a por derivación de la fórmula de recurrencia a:

$$\Gamma(z) \in H/\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$$

1.15.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES DE $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$

La notación de factorial se puede extender sobre $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$ con la tercera definición de Γ . Se define entonces:

$$\text{Def.: } z! := \Gamma(z+1) \quad z \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}$$

1.16.- DEFINICIÓN DE $1/\Gamma$ (Tercera Definición)

La función Gamma $1/\Gamma$ (en su segunda definición) se puede definir sobre todos los reales tomando para los valores de $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ el valor del límite que es 0 :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \xrightarrow{z \rightarrow -k} 0$$

$$\text{Definición: } 1/\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(z)} & z \neq \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \\ 0 & z = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \end{cases}$$

2.- FUNCIÓN BETA: FUNCIÓN EULERIANA DE PRIMERA ESPECIE

2.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE B

La función **B** tiene una primera definición sobre el dominio $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ que más adelante se extenderá sobre los dominios

$$D = (\mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\})$$

$$D = (\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}) \times (\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\})$$

2.1.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Beta **B** (en su primera definición) Euleriana de Primera Especie:

Definición de B (primera): $B : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$(p, q) \rightarrow B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Obs.: La justificación de que el dominio de **B** es efectivamente $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ se obtiene del análisis de convergencia que sigue.

2.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANALISIS DE CV DE LA II

Se analiza la CV de la II anterior para justificar la definición.

1.- Existencia de la función integrando, salvo para puntos singulares aislados y puntos singulares:

$$\begin{aligned} \exists f : \quad & \forall x \in]0, 1[\quad \exists x^{p-1} (1-x)^{q-1} \\ \text{p.s. } V_{0+} : & \quad \forall p < 1 \\ & \quad V_{1-} \quad \forall q < 1 \end{aligned}$$

2.- Existencia de la Integral de Riemann sobre el Intervalo de Integración excluyendo los vecinales de los puntos singulares:

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f \in C[\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2] : \forall \varepsilon_i > 0$$

3.1. Análisis de CV en V_{0+} : se compara con x^{p-1}

$$\left. \begin{aligned} & \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1 \\ & \int_{V_{0+}} \frac{1}{x^{1-p}} dx \in CV \Leftrightarrow 1-p < 1 \Leftrightarrow p > 0 \quad [\text{Tabla 2}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \in CV \Leftrightarrow p > 0$$

3.2.- Análisis de CV en V_{1-} : se compara con

$$\left. \begin{aligned} & \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1-} 1 \\ & \int_{V_{1-}} \frac{1}{(1-x)^{1-q}} dx \in CV \Leftrightarrow 1-q < 1 \Leftrightarrow q > 0 \quad [\text{Tabla 2}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{V_{1-}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \in CV \Leftrightarrow q > 0$$

4.- Resumen

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \in CV \Leftrightarrow (p > 0) \cap (q > 0)$$

2.2.- OTRAS FORMAS DE B

Otras formas de la función **B** se obtienen por medio de cambios de variables. Por ejemplo:

2.2.1.- SEGUNDA FORMA DE B

$$T_1.- \quad \text{Def } B \Rightarrow B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

Partiendo de

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

se hace el cambio de variable

$$x = \frac{y}{1+y}$$

$$1-x = 1 - \frac{y}{1+y} = \frac{1}{1+y}$$

$$1+y = \frac{1}{1-x}$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

Es decir:

$$x = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x}$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$dx = + \frac{1}{(1+y)^2} dy$$

Reemplazando

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p-1}} \frac{1}{(1+y)^{q-1}} \frac{1}{(1+y)^2} dy$$

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

2.2.2.- TERCERA FORMA DE B

$$T_2.- \quad \text{Def } B \Rightarrow B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \phi \cos^{2q-1} \phi d\phi$$

Partiendo de

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

se hace el cambio de variable

$$+x^{1/2} = \sin \varphi \Leftrightarrow \varphi = \text{Arc sin } x^{1/2}$$

$$x = 0 \rightarrow \varphi = 0$$

$$x = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$dx = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

Reemplazando

$$B(p, q) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-2} \varphi \cos^{2q-2} \varphi \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \varphi \cos^{2q-1} \varphi d\varphi$$

Ejemplos:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^r \varphi \cos^s \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)$$

Caso particular

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Caso particular

$$\int_0^{\pi/2} \sin^r \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

2.2.3.- CUARTA FORMA DE B

$$T_3.- \quad \text{Def } B \Rightarrow B(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{(1+e^t)^{p+q}} dt$$

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx \xrightarrow{x=e^t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t(p-1)}}{(1+e^t)^{p+q}} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{(1+e^t)^{p+q}} dt \end{aligned}$$

2.3.- PROPIEDADES DE B

2.3.1.- REDUCCIÓN DE B A Γ

$$\left. \begin{array}{l} T_1- \\ \text{Def } B \\ \text{Def } \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad p > 0 \wedge q > 0$$

Sea el producto

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{q-1} dy \right)$$

que se puede transformar en Integral doble

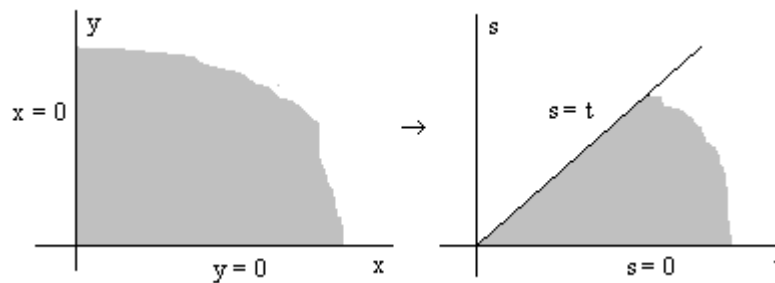
$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1} dy dx$$

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} t = x + y \\ s = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t - s \end{cases}$$

donde la Frontera del recinto de integración se transforma

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow s = 0 \\ y = 0 &\rightarrow s = t \\ |\det J| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$



Reemplazando

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-t} s^{p-1} (t-s)^{q-1} ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \int_0^t s^{p-1} (t-s)^{q-1} ds dt \end{aligned}$$

Con un nuevo cambio de variables en la integral interna

$$s = t u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{s}{t}$$

$$s = 0 \rightarrow u = 0$$

$$s = t \rightarrow u = 1$$

$$ds = t du$$

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \int_0^1 (tu)^{p-1} t^{q-1} (1-u)^{q-1} t ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du dt \\ &= B(p, q) \Gamma(p+q) \end{aligned}$$

2.3.2.- SIMETRÍA DE B

$$T_2.- \quad \text{Def } B \Rightarrow B(p, q) = B(q, p)$$

$$D_1 \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)} = B(q, p)$$

$$D_2 \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

Con el cambio de variables

$$y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y$$

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \rightarrow y = 0$$

$$dx = -dy$$

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = B(q, p)$$

2.3.3.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS

$$T_3.- \left. \begin{array}{l} \text{Def } B \\ \text{Def } \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \quad p \in]0, 1[$$

Hay varias maneras de demostrar la Fórmula de los Complementos, a continuación se presenta la primera de ellas, otras se presentan en el Apéndice

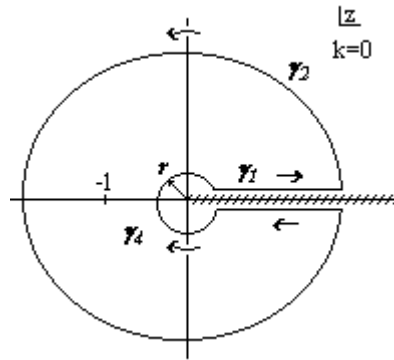
2.3.3.1.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: PRIMERA DEMOSTRACIÓN

D₁.- Una primera forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por cálculo de Residuos:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad p \in]0, 1[$$

Tomando la integral a lo largo del camino γ

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz$$



Por el Teorema de los Residuos:

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2\pi i R(-1)$$

$$\gamma_1: z = x e^{i0} \quad \int_{\gamma_1} = \int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{R \rightarrow +\infty} I$$

$$\gamma_2: \varphi \in]0, 2\pi[\quad z = r e^{+i\varphi} \quad L \text{ CSup} |f| = 2\pi R \frac{R^{p-1}}{R-1} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{0 < p < 1} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{0 < p < 1} 0$$

$$\gamma_3: z = x e^{+i2\pi} \quad \int_{\gamma_3} = \int_R^r \frac{x^{(p-1)} e^{i2\pi(p-1)}}{1+x e^{i2\pi}} e^{+i2\pi} dx \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{R \rightarrow +\infty} -e^{-i2\pi p} I$$

$$\gamma_4: \varphi \in]2\pi, 0[\quad z = r e^{+i\varphi} \quad L \text{ CSup} |f| = 2\pi r \frac{r^{p-1}}{1-r} \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{0 < p < 1} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_4} \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{0 < p < 1} 0$$

$$R(-1) = e^{+i\pi(p-1)} = -e^{+i\pi p}$$

Retomando

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2\pi i R(-1)$$

$$I + 0 - e^{-i2\pi p} I + 0 = -2\pi i e^{+i\pi p}$$

$$I \frac{e^{+i\pi p} - e^{-i\pi p}}{2i} = \pi$$

Se obtiene entonces

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

Por otro lado

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

$$B(p, 1-p) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y} dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p) \Gamma(1-p)$$

De donde resulta la Fórmula de los Complementos

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.3.4.- EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS

Se puede extender la validez de la Fórmula de los Complementos a $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$$T_4 - \left. \begin{array}{l} \text{Def } \Gamma \\ p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

Tomando por ejemplo

$$\begin{array}{l} p \in]1, 2[\Rightarrow p-1 \in]0, 1[\quad \Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1) \\ \Rightarrow 1-p \in]-1, 0[\Rightarrow 2-p \in]0, 1[\quad \Gamma(2-p) = (1-p) \Gamma(1-p) \end{array}$$

Entonces para $p \in]1, 2[$

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(1-p) &= (p-1) \Gamma(p-1) \frac{\Gamma(2-p)}{(1-p)} \\ &= (-1) \Gamma(p-1) \Gamma(2-p) \\ &= (-1) \frac{\pi}{\sin(\pi(p-1))} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \end{aligned}$$

Análogamente esto se extiende a $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$$p \notin]0, 1[\quad p \in \mathbb{Z}$$

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2) \dots (q+1) q \Gamma(q) \quad : \quad q \in]0, 1[$$

$$\Gamma(1-q) = (-q)(-q-1) \dots (2-p)(1-p) \Gamma(1-p) \quad : \quad 1-q \in]0, 1[$$

$$= (-1)^{p-q} (q)(q+1) \dots (p-2)(p-1) \Gamma(1-p)$$

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = (-1)^{q-p} (p-1)(p-2) \dots (q+1) q \Gamma(q) \frac{\Gamma(1-q)}{(p-1)(p-2) \dots (q+1)q}$$

$$= (-1)^{q-p} \Gamma(q) \Gamma(1-q)$$

$$= (-1)^{q-p} \frac{\pi}{\sin(\pi q)}$$

$$p-q = k \in \text{Par} \Rightarrow \sin(\pi q) = \sin(\pi(p+k)) = \sin(\pi p)$$

$$\in \text{Impar} \Rightarrow \sin(\pi q) = \sin(\pi(p+k)) = -\sin(\pi p)$$

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.3.5.- RELACIÓN CON LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

$$T_5.- \text{Def } B \Rightarrow B(p, q) = \frac{p+q}{p \cdot q} \frac{1}{\binom{p+q}{p}} \quad (p, q) \in \mathbb{N}^2$$

$$D.- B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$= \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

$$= \frac{p+q}{p \cdot q} \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

$$= \frac{p+q}{p \cdot q} \frac{1}{\binom{p+q}{p}}$$

2.3.6.- FÓRMULA DE DUPLICACION PARA $P \in \mathbb{R}^+$

$$T_6 \text{- Def } B \Rightarrow \Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \quad \text{Fórmula de Duplicación para } n \in \mathbb{R}^+$$

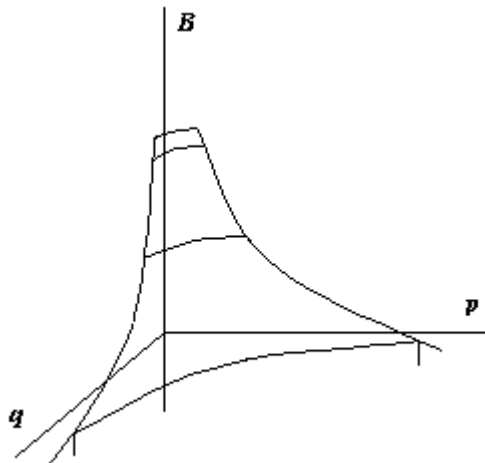
$$\begin{aligned} B(p, p) &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \varphi \cos^{2p-1} \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2^{2p-1}} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(2\varphi) \, d\varphi \\ \xrightarrow{\theta=2\varphi} &= \frac{1}{2^{2p-1}} 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^{2p-1}(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2^{2p-1}} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(p, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}} \frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)$$

2.4.- REPRESENTACION GRAFICA DE B (PRIMERA DEFINICION)

La gráfica de la función B para $p > 0$ y $q > 0$ es:



2.5.- SEGUNDA DEFINICIÓN DE B

La segunda definición de la función B se hace para extender la primera definición al dominio \mathbf{R}^2 que en rigor será $D = [\mathbf{R} - \mathbf{Z}^- - \{0\}]^2$

La extensión se basa en la Fórmula que relaciona a B con Γ

2.5.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Beta B (en su segunda definición) o Función Euleriana de Primera Especie:

Definición de B (segunda):

$$B : [\mathbf{R} - \mathbf{Z}^- - \{0\}]^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(p, q) \rightarrow B(p, q) := \begin{cases} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx & (p, q) \in (\mathbf{R}^+)^2 \\ \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} & (p, q) \in [\mathbf{R} - \mathbf{Z}^- - \{0\}]^2 \end{cases}$$

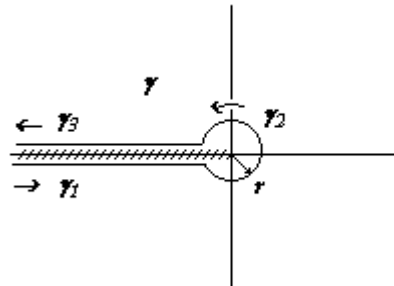
2.6.- OTRAS PROPIEDADES DE B Y Γ

2.6.1.- OTRA FORMA DE Γ (TERCERA FORMA)

$$T_1.- \left. \begin{array}{l} 3^a \text{ Def } \Gamma \\ \operatorname{Re}(\alpha) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^{\alpha+1}} dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Tomando la integral a lo largo del camino γ

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^{\alpha+1}} dz$$



$$2\pi i I = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}$$

$$\gamma_1: z = x e^{-i\pi} \quad \int_{\gamma_1} = \int_{+R}^r \frac{e^{xe^{-i\pi}}}{x^{\alpha+1} e^{-i\pi(\alpha+1)}} e^{-i\pi} dx \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{R \rightarrow +\infty} e^{+i\pi\alpha} \int_0^{+\infty} x^{-(\alpha+1)} e^{-x} dx$$

$$\gamma_2: \varphi \in]-\pi, \pi[\quad z = r e^{+i\varphi} \quad L \text{ CSup} |f| = 2\pi r \frac{e^{r \cos \varphi}}{r^{\alpha+1}} \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{\text{Re}(\alpha) < 0} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{\text{Re}(\alpha) < 0} 0$$

$$\gamma_3: z = x e^{+i\pi} \quad \int_{\gamma_3} = \int_{-R}^r \frac{e^{xe^{+i\pi}}}{x^{\alpha+1} e^{i\pi(\alpha+1)}} e^{+i\pi} dx \xrightarrow[r \rightarrow 0+]{R \rightarrow +\infty} e^{-i\pi\alpha} \int_0^{+\infty} x^{-(\alpha+1)} e^{-x} dx$$

$$I = \frac{e^{+i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i} \int_0^{+\infty} x^{-(\alpha+1)} e^{-x} dx$$

$$I = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \Gamma(-\alpha)$$

Por la Fórmula de los Complementos

$$\Gamma(-\alpha) \Gamma(\alpha+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Obs.: El resultado también es válido sobre R

2.6.2.- VALORES NOTABLES $\Gamma'(\frac{1}{2})$

$$T_2.- \left. \begin{array}{l} \text{Def } \Gamma \\ \text{Def } B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -2L2 + \Gamma'(1)$$

D₁.- A partir de la fórmula de duplicación

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p) \Gamma(p + \frac{1}{2})$$

derivando en forma logarítmica:

$$2 \frac{\Gamma'(2p)}{\Gamma(2p)} = 2L2 + \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \frac{\Gamma'(p + \frac{1}{2})}{\Gamma(p + \frac{1}{2})}$$

$$2 \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 2L2 + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

$$\text{para } p = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -2L2 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -2L2 + \Gamma'(1)$$

D₂- A partir de $B(p, \frac{1}{2})$

$$B(p, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \varphi \, d\varphi$$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \varphi \, d\varphi$$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \left[\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma'(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \right] = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \varphi \, L \sin \varphi \, d\varphi$$

para $p = \frac{1}{2}$

$$\pi \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1) \right] = 4 \int_0^{\pi/2} L \sin \varphi \, d\varphi$$

Calculando

$$I = \int_0^{\pi/2} L \sin \varphi \, d\varphi \xrightarrow{\varphi = \pi/2 - \theta} = \int_0^{\pi/2} L \cos \theta \, d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} L \sin \varphi \, d\varphi \xrightarrow{\varphi = \pi - \theta} = \int_{\pi/2}^{\pi} L \sin \theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} L \sin \varphi \, d\varphi = 2I$$

$$\int_0^{\pi/2} L \sin 2\varphi \, d\varphi \xrightarrow{2\varphi = \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} L \sin \theta \, d\theta = I$$

$$I = \int_0^{\pi/2} L \sin 2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} L (2 \sin \varphi \cos \varphi) \, d\varphi =$$

$$I = \int_0^{\pi/2} L 2 \, d\varphi + \int_0^{\pi/2} L \sin \varphi \, d\varphi + \int_0^{\pi/2} L \cos \varphi \, d\varphi$$

$$I = \frac{\pi}{2} L 2 + I + I$$

$$I = -\frac{\pi}{2} L 2$$

Retornando a

$$\pi \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1) \right] = 4 \int_0^{\pi/2} L \sin \varphi \, d\varphi$$

$$\pi \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1) \right] = 4 \left(-\frac{\pi}{2} L 2 \right)$$

Se llega a

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -2L 2 + \Gamma'(1)$$

Obs.: A partir de la primera Demostración :

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -2L2 + \Gamma'(1)$$

y sabiendo de la primera parte de la segunda Demostración

$$\pi \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1) \right] = 4 \int_0^{\pi/2} L \sin \phi \, d\phi$$

se puede extraer:

$$I = \int_0^{\pi/2} L \sin \phi \, d\phi = -\frac{\pi}{2} L2$$

2.7.- TERCERA DEFINICION DE B

La segunda definición de la función **B** se hace para extender la segunda definición sobre el dominio $[\mathbb{R} - \mathbb{Z}^- - \{0\}]^2$ al dominio $[\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}]^2$

Para los reales negativos se extiende por definición la validez de la Fórmula de Recurrencia

2.7.1.- DEFINICION

Se llama función Gamma **B** (en su tercera definición) Euleriana de Segunda Especie:

Definición de B (tercera):

$$B : [\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}]^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(p, q) \rightarrow B(p, q) := \begin{cases} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx & (p, q) \in \mathbb{C}^2 \wedge \operatorname{Re}(p) > 0 \wedge \operatorname{Re}(q) > 0 \\ \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} & (p, q) \in [\mathbb{C} - \mathbb{Z}^- - \{0\}]^2 \end{cases}$$

3.- FUNCIÓN GAMMA INCOMPLETA

Análogamente a las definiciones hechas para la función Γ existen varias definiciones de la función Γ incompleta a partir de sucesivas extensiones del Dominio, a saber:

$$\begin{aligned} D &= \mathbf{R}^+ \\ D &= \mathbf{R} - \mathbf{Z}^- - \{0\} \\ D &= \mathbf{C} - \mathbf{Z}^- - \{0\} \end{aligned}$$

3.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE Γ INCOMPLETA

3.1.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma Γ incompleta (en su primera definición sobre el dominio \mathbf{R}^+):

Definición de Γ incompleta (Primera): $\Gamma: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$(\alpha, x) \rightarrow \Gamma(\alpha, x) := \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

1.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANALISIS DE CV DE LA II

Se analiza la CV de la II anterior para justificar la definición.

1.- Existencia de la función integrando, salvo para puntos singulares aislados y los puntos singulares

$$\exists f: \quad \forall x \in]0, A[\quad \exists e^{-t} t^{\alpha-1}$$

Puntos singulares:

p.s. $V_{0+} \quad \forall \alpha < 1$

2.- Existencia de la Integral de Riemann sobre el Intervalo de Integración excluyendo los vecinales de los puntos singulares:

$$\int_a^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt \in \mathbf{IR} \Leftrightarrow f \in C[a, x] : a > 0$$

3.- Análisis de CV en V_{0+} : se compara con $t^{\alpha-1}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}} &= \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{1/t^{1-\alpha}} \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 1 \\ \int_{V_{0+}} \frac{1}{t^{1-\alpha}} dt &\in CV \Leftrightarrow 1-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0 \quad [\text{Tabla 2}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

4.- Resumen de CV

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

APENDICE III

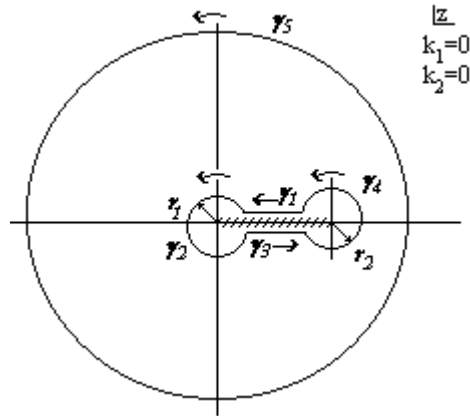
2.3.3.2.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

D_2 .- Una segunda forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por cálculo de Residuos:

$$I(p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{-p} dx \quad p \in]0, 1[$$

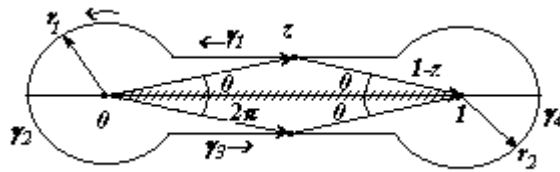
Tomando la integral a lo largo del camino γ

$$I = \int_{\gamma} z^{p-1} (1-z)^{-p} dz$$



Por el 2º Corolario del Teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \int_{\gamma_5}$$



$$\gamma_1: z = x e^{i0} \quad 1-z = (1-x) e^{i0}$$

$$\int_{\gamma_1} = \int_{-r_2}^{r_1} x^{p-1} (1-x)^{-p} dx \xrightarrow[r_1 \rightarrow 0+]{r_2 \rightarrow 0+} -I$$

$$\gamma_2: \varphi \in]0, 2\pi[\quad z = r_1 e^{+i\varphi}$$

$$L \text{ CSup} |f| = 2\pi r_1^{p-1} (1-r_2)^{-p} \xrightarrow[r_1 \rightarrow 0+]{0 < p} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} \xrightarrow[r_1 \rightarrow 0+]{0 < p} 0$$

$$\gamma_3: z = x e^{+i2\pi} \quad 1-z = (1-x) e^{i0}$$

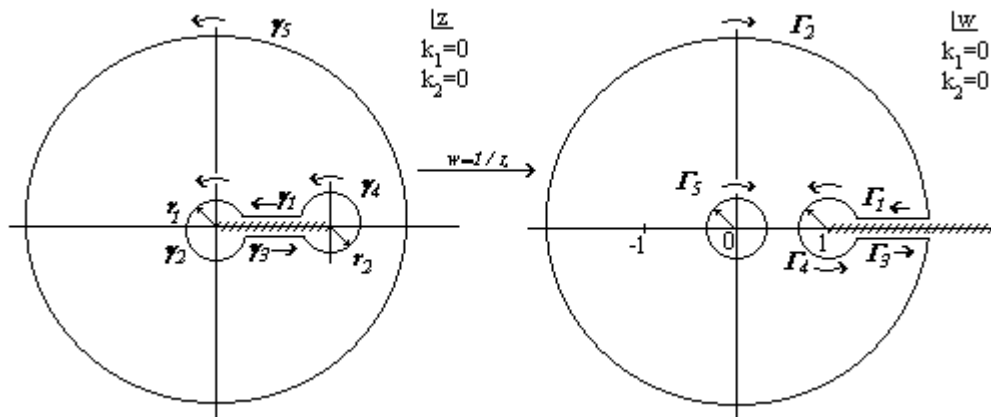
$$\int_{\gamma_3} = \int_{r_1}^{-r_2} x^{p-1} e^{+i2\pi(p-1)} (1-x)^{-p} e^{+i2\pi} dx \xrightarrow[r_1 \rightarrow 0+]{r_2 \rightarrow 0+} + e^{+i2\pi p} I$$

$$\gamma_4: \varphi \in]2\pi, 0[\quad z = r_2 e^{+i\varphi}$$

$$L \text{ CSup} |f| = 2\pi r_2^{p-1} (1-r_1)^{-p} r_2^{-p} \xrightarrow[r_2 \rightarrow 0+]{p < 1} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_4} \xrightarrow[r_2 \rightarrow 0+]{p < 1} 0$$

Para obtener la integral sobre γ_5 se aplica la inversión:

$$\gamma_5: \varphi \in [0, 2\pi] \quad z = R e^{+i\varphi} \quad \xrightarrow{w=1/z} \quad \Gamma_5: \Phi \in [0, -2\pi] \quad w = R^{-1} e^{-i\Phi}$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{5+}} &= \int_{\Gamma_{5-}} \frac{1}{w^{p-1}} \left(1 - \frac{1}{w}\right)^{-p} \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw \\ &= \int_{\Gamma_{5+}} \frac{(w-1)^{-p}}{w} dw \\ &= 2\pi i R(0) \end{aligned}$$

donde

$$R(0) = (-1)^{-p} = e^{-i\pi(-p)} = e^{-i\pi p}$$

Retomando

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \int_{\gamma_5}$$

$$-I + 0 + e^{+i2\pi p} I + 0 = 2\pi i e^{-i\pi p}$$

$$I \frac{e^{+i\pi p} - e^{-i\pi p}}{2i} = \pi$$

Se obtiene entonces

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.3.3.3.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: TERCERA DEMOSTRACIÓN

D₃- Una tercera forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por cálculo de Residuos:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \xrightarrow{x=e^t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t(p-1)}}{1+e^t} e^t dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt \quad p \in]0, 1[$$

Tomando la integral a lo largo del camino γ

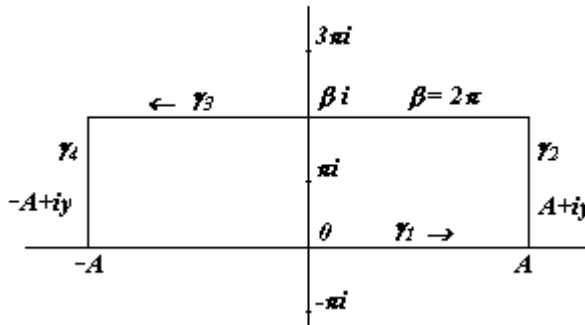
$$I = \int_{\gamma} \frac{e^{pz}}{1+e^z} dz$$

La función integrando no tiene puntos de ramificación, pero tiene Polos en

$$1+e^t = 0 \Rightarrow t = (\pi + 2k\pi) i$$

que son todos de primer orden. Para que se incluya un solo Polo en el recinto de integración, se elige

$$\beta \in]\pi, 3\pi[$$



Por el Teorema de los Residuos:

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2\pi i R(\pi i)$$

$$\gamma_1: z = t \quad \int_{\gamma_1} = \int_{-A}^A \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} I$$

$$\gamma_2: y \in]0, \beta] \quad z = A+iy \quad L \text{ CSup} |f| = \beta \frac{e^{pA}}{e^A - 1} = \beta \frac{e^{(p-1)A}}{1 - e^{-A}} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{0 < p < 1} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_2} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{0 < p < 1} 0$$

$$\gamma_3: z = t + i\beta \quad \int_{\gamma_3} = \int_A^{-A} \frac{e^{p(t+i\beta)}}{1+e^{t+i\beta}} dt \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{\beta=2\pi} -I e^{i2\pi p}$$

Para obtener una ecuación con una sola incógnita, al aplicar el Teorema de los residuos se elige $\beta = 2\pi$

$$\gamma_4: y \in]\beta, 0] \quad z = -A+iy \quad L \text{ CSup} |f| = \beta \frac{e^{-pA}}{e^{-A} - 1} = \frac{1}{0 < p < 1} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \int_{\gamma_4} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{0 < p < 1} 0$$

El cálculo del Residuo en πi

$$R(\pi i) = -e^{+i\pi p}$$

Retomando

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2\pi i R(\pi i)$$

$$I + 0 - e^{-i2\alpha p} I + 0 = -2\pi i e^{+i\pi p}$$

$$I \frac{e^{+i\pi p} - e^{-i\pi p}}{2i} = \pi$$

Se obtiene entonces

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.3.3.4.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: CUARTA DEMOSTRACIÓN

D₄- Una cuarta forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por medio de la Serie de Fourier Trigonométrica:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

1.1.- Cambiando de variable $x = e^t$

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \xrightarrow{x=e^t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t(p-1)}}{1+e^t} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dx \quad p \in]0, 1[\end{aligned}$$

Se puede construir una función $g(p)$ definida en $p \in]0, 1[$

$$g(p) = \sin(\pi p) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

$$g(p) = \sin(\pi p) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt$$

1.2.- La función $g(p)$ se desarrollará en Serie de Fourier como función par en el intervalo $p \in]-1, 1[$ donde resulta entonces un período $T=2$.

Obs.: $g(p)$ es indeterminada para $p=0$ y $p=1$ pero su límite en ambos casos es π

$$g(p) = \sin(\pi p) \Gamma(p)\Gamma(1-p) \approx \sin(\pi p) \frac{1}{p} \Gamma(p+1) \Gamma(1-p) \xrightarrow{p \rightarrow 0} \pi$$

$$g(p) = \sin(\pi p) \Gamma(p)\Gamma(1-p) \approx \sin(\pi(1-p)) \Gamma(p) \frac{1}{1-p} \Gamma(2-p) \xrightarrow{p \rightarrow 1} \pi$$

Desarrollando como función par

$$b_k = 0$$

$$a_k = 2 \int_0^1 \sin(\pi p) I(p) \cos(k\pi p) dp = \int_0^1 I(p) [\sin((k+1)\pi p) - \sin((k-1)\pi p)] dp$$

1.3.- Se calcula

$$\begin{aligned} G(n) &= \int_0^1 \sin(n\pi p) I(p) dp = \int_0^1 \sin(n\pi p) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t} dt \right] dp \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} \left[\int_0^1 e^{pt} \sin(n\pi p) dp \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} \left[\frac{e^{pt}}{t^2 + (n\pi)^2} [t \sin(n\pi p) - n\pi \cos(n\pi p)] \right] \Big|_0^1 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} \left[\frac{n\pi}{t^2 + (n\pi)^2} [1 - (-1)^n e^t] \right] dt \end{aligned}$$

que para $n \in \text{Impar}$

$$G(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\pi}{t^2 + (n\pi)^2} dt = \pi$$

y que para $n \in \text{Par}$

$$G(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^t}{1+e^t} \frac{n\pi}{t^2 + (n\pi)^2} dt$$

Que es la Integral de una función impar $\Rightarrow G(n) = 0$

1.4.- Se calcula ahora los a_0 y los a_k

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 I(p) [\sin(\pi p) - \sin(-1)\pi p] dp \\ &= 2 \int_0^1 I(p) \sin(\pi p) dp \\ &= 2 G(1) = 2\pi \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 I(p) [\sin((k+1)\pi p) - \sin((k-1)\pi p)] dp \\ &= G(k+1) - G(k-1) = 0 \end{aligned}$$

1.5.- Entonces la Serie de Fourier es

$$g(p) = \sin(\pi p) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \pi$$

Se obtiene la formula de los complementos

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$