NOTAS PARA LOS ALUMNOS DEL CURSO DE ANALISIS MATEMATICO III

FUNCIONES EULERIANAS

Ing. Juan Sacerdoti

Departamento de Ingeniería
Universidad de Buenos Aires
2002
V 2.02

INDICE

1.- FUNCIÓN GAMMA: FUNCIÓN EULERIANA DE SEGUNDA ESPECIE

Existen varias definiciones de la función Γ a partir de sucesivas extensiones del Dominio, a saber:

$D = R^+$
$D = R - Z^- - \{0\}$
$D = C - Z^- - \{0\}$

Que se desarrollarán a lo largo del texto.

1.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE Γ

1.1.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma Γ (en su primera definición sobre el dominio R^+) o Función Euleriana de Segunda Especie:

Definición de Γ (Primera): $\Gamma: R^+ \to R$

$$\alpha \to \Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx$$

Obs.: La justificación de que Γ es efectivamente una función y de que su dominio es R^+, se obtiene del análisis de convergencia y unicidad que siguen.

1.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANALISIS DE CV DE LA II

Se analiza la CV de la II anterior para justificar la definición.

1.- Existencia de la función integrando, salvo para puntos singulares aislados y puntos singulares de la Integral Impropia:

$\exists f: \quad \forall x \in]0\ A[\quad \exists\, e^{-x}\, x^{\alpha-1}$

p.s. $V_{+\infty}$
$V_{0+} \quad \forall \alpha < 1$

2.- Existencia de la Integral de Riemann sobre el Intervalo de Integración excluyendo los vecinales de los puntos singulares:

$$\int_a^A e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in IR \quad \Leftarrow \quad f \in C[a\ A] \ : \ a > 0$$

3.1. Análisis de CV en $V_{+\infty}$: se compara con $1/x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{-x} x^{\alpha-1}}{1/x^2} = \dfrac{x^{\alpha+1}}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \displaystyle\int_{V+\infty} \frac{1}{x^2} dx \in CV \quad [\text{Tabla } 1] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \int_{V+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in CV \quad \forall \alpha$$

3.2.- Análisis de CV en V_{0+} : se compara con $x^{\alpha-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} = \dfrac{e^{-x}x^{\alpha-1}}{1/x^{1-\alpha}} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1 \\ \displaystyle\int_{V_{0+}} \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx \in CV \Leftrightarrow 1-\alpha \prec 1 \Leftrightarrow \alpha \succ 0 \quad \text{[Tabla 2]} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-x}x^{\alpha-1}dx \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

4.- Resumen de CV

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

1.1.3.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: UNICIDAD DE LA RELACIÓN Γ SOBRE R^+

La Relación Γ sobre R^+ es unívoca (y por lo tanto es una función) hecho que se deduce a partir de la unicidad de la Integral de Riemann y la unicidad del Límite siguiente:

$$\Gamma(\alpha) := \lim_{\substack{A\to+\infty \\ a\to 0+}} \int_a^A e^{-x}\, x^{\alpha-1}\,dx$$

1.1.4.- CONTINUIDAD DE Γ SOBRE R^+

T.- Def Γ $\Rightarrow$ $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\,dx \in C/R^+$

Toda Integral de función continua es continua.

1.2.- OTRAS FORMAS DE Γ

Otras formas de la función Γ se obtienen por medio de cambios de variables. Por ejemplo:

T.- Segunda Forma de Γ

Def Γ $\Rightarrow$ $\Gamma(\alpha) = \int_0^1 [\,L(\frac{1}{y})]^{\alpha-1}\,dy$

Tomando $y > 0$ se hace el cambio de variable

$y > 0 \qquad e^{-x} = y \Leftrightarrow x = L(\frac{1}{y})$

$x = 0 \to y = 1$

$x \to +\infty \to y = 0$

$dx = -\frac{1}{y}\,dy$

Resulta

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 [\,L(\frac{1}{y})]^{\alpha-1}\,dy$$

1.3.- PROPIEDADES DE Γ

1.3.1.- FÓRMULA DE RECURRENCIA

T_1.- Def Γ ⇒ $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\ \Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{\alpha}\ dx$$

$$= -e^{-x}\,x^{\alpha}\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{\alpha-1}\,dx$$

$$\xrightarrow{\alpha>0} \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

Obs.: No olvidar que $\alpha > 0$

1.3.2.- FÓRMULA DE RECURRENCIA GENERALIZADA

T_2.- Def Γ ⇒ $\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)\,(\alpha+k-1)\,(\alpha+k-2)\ ...\ (\alpha+1)\ \alpha\ \Gamma(\alpha)$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha)} = \prod_{j=0}^{k} (\alpha+j)$$

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)\,\Gamma(\alpha+k)$$
$$= (\alpha+k)\,)\,(\alpha+k-1)\,\Gamma(\alpha+k-1)$$
$$= (\alpha+k)\,)\,(\alpha+k-1)\,(\alpha+k-2)\,\Gamma(\alpha+k-2)$$

...

$$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)\,(\alpha+k-1)\,(\alpha+k-2)\ ...\ (\alpha+1)\ \alpha\ \Gamma(\alpha)$$

O también

$$\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha)} = \prod_{j=0}^{k} (\alpha+j)$$

1.3.3.- VALORES NOTABLES Γ(1) = 1

T_3.- Def Γ ⇒ Γ(1) = 1

$$\Gamma(1) := \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

1.3.4.- VALORES NOTABLES Γ(n+1) = n!

T_4.- Def Γ ⇒ Γ(n+1) = n!

Aplicando la Fórmula de recurrencia generalizada

$$\Gamma(n+1) = n\,(n-1)\,(n-2)\ ...\ 3.\ 2\ .\ 1\ \ \Gamma(1) = n!$$

Obs.: Nótese que la función Γ es una extensión a R^+ de los factoriales naturales n!. Por lo tanto se verifica que Γ(1) = 0!

1.3.5.- VALORES NOTABLES $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

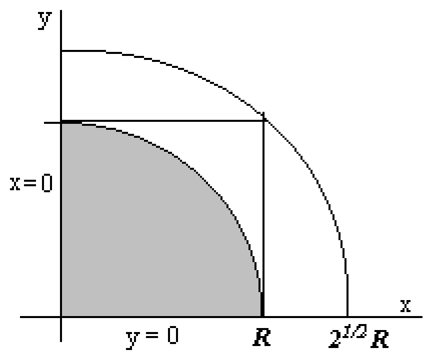
T$_5$.- Def Γ $\Rightarrow$ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Previamente se demuestra

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$I^2 = \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right]\left[\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right]$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$



Tomando la integral doble antes de pasar al límite

$$\int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Por ser la función integrando positiva, se puede acotar

$$\int_0^R\int_0^{+\sqrt{R^{1/2}-x^{1/2}}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \;\le\; \int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \;\le\; \int_0^{2^{1/2}R}\int_0^{+\sqrt{2R^{1/2}-x^{1/2}}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Cambiando a coordenadas polares las integrales de los extremos:

$$\int_0^R\int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi \;\le\; \int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \;\le\; \int_0^{2^{1/2}R}\int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\pi\int_0^R e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi \;\le\; \int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \;\le\; \frac{1}{2}\pi\int_0^{2^{1/2}R} e^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$-\frac{1}{4}\pi\; e^{-\rho^2}\Big|_0^R \;\le\; \int_0^R\int_0^R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \;\le\; -\frac{1}{4}\pi\; e^{-\rho^2}\Big|_0^{2^{1/2}R}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \le & \downarrow & \le & \downarrow \\ \frac{1}{4}\pi & \le & I^2 & \le & \frac{1}{4}\pi \end{array}$$

Es decir:

$$I^2 = \frac{1}{4}\pi$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

1.3.6.- VALORES NOTABLES $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ FÓRMULA DE DUPLICACIÓN PARA $n\in N$

T_6.- Def Γ $\Rightarrow$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\,(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{2^n}\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1\,\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$$ ***Fórmula de Duplicación para $n\in N$***

Por la fórmula de recurrencia se induce

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

...

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\,(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

fórmula que también puede expresarse

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\,(n-\frac{3}{2})\ldots\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{2^n}\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1\,\sqrt{\pi}$$

o también una tercera forma que es la Fórmula de Duplicación para ***$n\in N$***

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2n}\,n!}\,2n\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$$

1.3.7.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $V(0^+)$

T_7.- Def Γ $\Rightarrow$ $\alpha\in V(0^+)$ $\Gamma(\alpha) \cong \frac{1}{\alpha}$

La función ***Γ*** se comporta como la hipérbola $\boldsymbol{\frac{1}{\alpha}}$ en el ***$V(0^+)$***

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} = \Gamma(\alpha+1) \xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} 1$$

1.3.8.- MÍNIMO DE Γ EN R^+

T_8.- Def Γ $\Rightarrow$ $\exists\xi = \alpha_{min} \in [1\ 2]$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ x^{\alpha-1}\, dx > 0$$

$\Gamma(\alpha) \in C/R^+$
$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(2) = 1$

Por el Teorema de Rolle:

$\Rightarrow \exists\xi \in [1\ 2] : \ \Gamma'(\xi) = 0$

Obs.: La abscisa del mínimo es $\alpha_{min} = 1{,}461\ 63\ ...$ y la ordenada $\Gamma(\alpha_{min}) = 0{,}885\ 60...$

1.3.9.- RESUMEN DE PROPIEDADES

Def Γ

$\Rightarrow T_1$ $\quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ ***Fórmula de recurrencia***

$\Rightarrow T_2$ $\quad \Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\ ...\ (\alpha+1)\ \alpha\ \Gamma(\alpha)$
Fórmula de recurrencia generalizada

$\Rightarrow T_3$ $\quad \Gamma(1) = 1$

$\Rightarrow T_4$ $\quad \Gamma(n+1) = n!$

$\Rightarrow T_5$ $\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\Rightarrow T_6$ $\quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\ ...\ \frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \sqrt{\pi}$

$$= \frac{1}{2^n}\ (2n-1)(2n-3)\ ...\ 5\ .\ 3\ .\ 1\ \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!}\ \sqrt{\pi}$$ ***Fórmula de Duplicación para $n \in N$***

$\Rightarrow T_7$ $\quad \alpha \in V(0^+) \Rightarrow \Gamma(\alpha) \cong \frac{1}{\alpha}$

$\Rightarrow T_8$ $\quad \exists\xi = \alpha_{min} \in [1\ 2]$

1.4.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES REALES POSITIVOS

A partir del T_4 se justifica tomar a la función Γ como extensión del factorial sobre R^+**.** Se define entonces

Def.: $\alpha! := \Gamma(\alpha+1)$

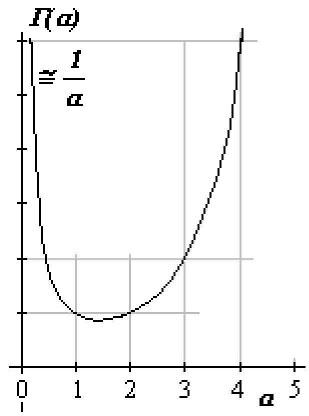
En particular

$0! := \Gamma(1) = 1$

Obs.: La notación de factorial se extenderá a medida que se extiende la definición de Γ.

1.5.- REPRESENTACIÓN GRAFICA DE Γ (PRIMERA DEFINICIÓN)

La gráfica de la función Γ para $\alpha > 0$ es:



1.6.- DERIVADA DE LA FUNCIÓN Γ

Como se probará sobre el intervalo real $0<\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ existe la Derivada de la función Γ cuya representación es:

$$\text{Def } \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \; x^{a-1} \; Lx \; dx \qquad \forall \alpha \quad 0 < \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$$

Se recuerda que para cambiar el orden de derivación en una integral impropia es suficiente que se cumpla:

$$\left.\begin{array}{ll} H_1 & f \in CP / t,\alpha \\ H_2 & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \in CP / t,\alpha \\ H_3 & \displaystyle\int_{V+\infty} f \in CV \\ H_4 & \displaystyle\int_{V+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \in CU \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{V+\infty} f(t,\alpha)\; dt = \int_{V+\infty} \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha}\; dt$$

Las Hipótesis H_1 y H_3 se cumplen:
Derivando bajo el signo integral se tiene:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \; x^{\alpha-1} \; Lx \; dx$$

se comprueba que se cumple H_2 . Falta verificar H_4 .

Empezando en $V_{+\infty}$ el análisis de la CU

$V_{+\infty}$.- $\forall\, \alpha \leq \alpha_2 \qquad x^{\alpha-1} \leq x^{\alpha_2-1}$

$$\left| \int_{V_{+\infty}} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx \right| = \left| \int_{V_{+\infty}} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, Lx\, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_{V_{+\infty}} e^{-x}\, x^{\alpha_2-1}\, Lx\, dx \right|$$

Esta última CV en $V_{+\infty}$ pues comparando con $1/x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{-x}x^{\alpha_2-1}Lx}{1/x^2} = \dfrac{x^{\alpha_2+1}Lx}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \displaystyle\int_{V_{+\infty}} \frac{1}{x^2}\, dx \in CV \quad [\text{Tabla } 1] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{V_{+\infty}} e^{-x}\, x^{\alpha_2-1}\, Lx\, dx \in CV \quad \forall \alpha \leq \alpha_2$$

En consecuencia por el Teorema de Weierstrass

$$\Rightarrow \int_{V_{+\infty}} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, Lx\, dx \in CU \qquad \forall \alpha \leq \alpha_2$$

V_{0+} .- $\forall \alpha \geq \alpha_1 \qquad x^{\alpha-1} \leq x^{\alpha_1-1}$

$$\left| \int_{V_{0+}} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx \right| = \left| \int_{V_{0+}} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, Lx\, dx \right|$$

$$\leq \left| \int_{V_{0+}} e^{-x}\, x^{\alpha_1-1}\, Lx\, dx \right|$$

En V_{0+} se compara con x^{α_1-1}

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{-x}x^{\alpha-1}Lx}{x^{\alpha_1-1}} = \dfrac{e^{-x}x^{\alpha-1}Lx}{1/x^{1-\alpha_1}} = e^{-x}x^{\alpha-\alpha_1}Lx \xrightarrow[\substack{x\to0+ \\ \alpha>\alpha_1}]{} 0 \\ \displaystyle\int_{V0+} \frac{1}{x^{1-\alpha_1}}\, dx \in CV \Leftrightarrow 1-\alpha_1 \prec 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \succ 0 \quad [\text{Tabla } 2] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-x}\, x^{\alpha_1-1}\, Lx\, dx \in CV \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 > 0$$

En consecuencia por el Teorema de Weierstrass

$$\Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, Lx\, dx \in CU \quad \forall \alpha \geq \alpha_1 > 0$$

En resumen

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, Lx\, dx \in CU \qquad \forall \alpha \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$$

Por lo tanto es válido aplicar la Tesis del teorema enunciado

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{+\infty} f(t,\alpha)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\, dx$$

$$\Gamma'(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, Lx\, dx \qquad \forall \alpha \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$$

1.7. PROPIEDADES DE Γ'

1.7.1.- FÓRMULA DE RECURRENCIA DE Γ'

T_1.- Def Γ $\Rightarrow$ $$\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Derivando en forma logarítmica la Fórmula de recurrencia de Γ

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$

$$\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

1.7.2.- FÓRMULA DE RECURRENCIA GENERALIZADA Γ'

T_2.- Def Γ $\Rightarrow$ $$\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Derivando en forma logarítmica la Fórmula de Recurrencia de Γ

$\Gamma(\alpha+k+1) = (\alpha+k)\,(\alpha+k-1)\,(\alpha+k-2)\ldots(\alpha+1)\,\alpha\;\Gamma(\alpha)$

se obtiene la Fórmula de Recurrencia de Γ'

$$\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

1.7.3.- VALORES NOTABLES Γ'(1)

T_3.- Def Γ $\Rightarrow$ $$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\; Lx\; dx = -0.577\,2\ldots = -\gamma \quad (\gamma\text{: Constante de Euler})$$

Por cálculo numérico se obtiene el valor ***$\Gamma'(1)$ = – 0.577 215 664 990 ...*** que es el opuesto de la constante de Euler (se supone que es un número irracional)

1.7.4.- VALORES NOTABLES Γ'(n+1)

T_4.- Def Γ $\Rightarrow$ $$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = H(n) + \Gamma'(1)$$

En la expresión de recurrencia de ***Γ'***

$$\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

tomando $\alpha = 1$ y $k = n-1$ queda

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{2} + 1 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

definiendo la Suma Armónica de n términos

$$H(n) := \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{2} + 1$$

$$H(0) := 0$$

Resulta:

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = H(n) + \Gamma'(1)$$

1.7.5.- RESUMEN DE PROPIEDADES DE Γ

Def Γ $\Rightarrow T_1$ $$\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$ ***Fórmula de recurrencia de*** Γ

$\Rightarrow T_2$ $$\frac{\Gamma'(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\alpha+k-1} + \frac{1}{\alpha+k-2} + \ldots + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

Fórmula de recurrencia generalizada de Γ

$\Rightarrow T_3$ $$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, Lx\, dx = -0.577\,2\ldots = -\gamma$$ ***(*** γ***: Constante de Euler)***

$\Rightarrow T_4$ $$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = H(n) + \Gamma'(1)$$

1.8.- SEGUNDA DEFINICIÓN DE Γ

La segunda definición de la función Γ se hace para extender la primera definición al dominio **R** que en rigor será $D = R - Z^- - \{0\}$

Para los reales negativos se extiende por definición la validez de la Fórmula de Recurrencia

1.8.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma Γ (en su segunda definición) o Función Euleriana de Segunda Especie:

Definición de Γ (segunda): $\Gamma: R - Z^- - \{0\} \to R$

$$\alpha \to \Gamma(\alpha) := \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx & \alpha > 0 \\ \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) & \alpha < 0 \end{cases}$$

1.9.- PROPIEDADES DE Γ (SEGUNDA PARTE)

Se analiza por la Fórmula de Recurrencia el comportamiento de la función para los reales negativos y el cero.

1.9.1.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $V(0^-)$

T_9.- Def Γ (segunda definición) $\Rightarrow \alpha \in]-1\ 0[\Rightarrow \Gamma(\alpha) < 0$

$$\Rightarrow \alpha \in V(0^-) \Rightarrow \Gamma(\alpha) \cong \frac{1}{\alpha}$$

Partiendo de

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)$$

si $\alpha \in]-1\ 0[\Rightarrow \Gamma(\alpha) < 0$

Por otra parte la función Γ se también se comporta como la hipérbola $\frac{1}{\alpha}$ en el $V(0^-)$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha}} = \Gamma(\alpha+1) \xrightarrow[\alpha \to 0^-]{} 1$$

Esta propiedad se puede extender:

1.9.2.- COMPORTAMIENTO DE Γ EN EL $V(-k)$

T_{10}.- Def Γ (segunda definición) $\Rightarrow \alpha \in]-1\ 0[\Rightarrow \Gamma(\alpha) < 0$

$$\Rightarrow \alpha \in]-2\ -1[\Rightarrow \Gamma(\alpha) > 0$$

...

$$\Rightarrow \alpha \in]-(k+1)\ \ -k[\Rightarrow sg(\Gamma(\alpha)) = (-1)^k$$

$$\Rightarrow \alpha \in V(0^-)\ \ \Gamma(\alpha) \cong \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha \in V(-1)\ \ \Gamma(\alpha) \cong -\frac{1}{\alpha+1}$$

...

$$\Rightarrow \alpha \in V(-k)\ \ \Gamma(\alpha) \cong \frac{(-1)^k}{k!}\ \frac{1}{\alpha+k}$$

Partiendo de

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}\ \frac{1}{\alpha}\ \Gamma(\alpha+2)$$

si $\alpha \in\ ]-2\ -1\ [\ \Rightarrow\ \Gamma(\alpha) > 0$

La función Γ se también se comporta como la hipérbola $\frac{1}{\alpha+1}$ en el V(–1)

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}\ \Gamma(\alpha+2) \xrightarrow[\alpha\to -1]{} -1$$

Generalizando de

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha+k}\ \frac{1}{\alpha+k-1}\ \frac{1}{\alpha+k-2}\ \ldots\ \frac{1}{\alpha+1}\ \frac{1}{\alpha}\ \Gamma(\alpha+k+1)$$

si $\alpha \in\ ]-(k+1)\ \ -k[\ \Rightarrow\ sg(\Gamma(\alpha)) = (-1)^k$

La función Γ se también se comporta como la hipérbola $\frac{1}{\alpha+k}$ en el V(–k)

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\frac{1}{\alpha+k}} = \frac{1}{\alpha+k-1}\ \frac{1}{\alpha+k-2}\ \ldots\ \frac{1}{\alpha+1}\ \frac{1}{\alpha}\ \Gamma(\alpha+k+1) \xrightarrow[\alpha\to -k]{} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1.9.3.- LÍMITE DE $\Gamma(p+1-\nu)/\ \Gamma(1-\nu)$

T₁₀.-

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Def } \Gamma(\textit{segunda definición}) \\ n \in N \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\Gamma(p+1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \xrightarrow[\nu\to n]{} \frac{\Gamma(p+1-n)}{\Gamma(1-n)} \qquad n \in >-\infty,0>$$

$$\xrightarrow[\nu\to n]{} 0 \qquad n \in <1,p>$$

$$\xrightarrow[\nu\to n]{} (-1)^p \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-p)} \qquad n \in <p+1,+\infty<$$

D.-

$$\frac{\Gamma(p+1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} = (p-\nu)(p-1-\nu)(p-2-\nu)\ldots(2-\nu)(1-\nu) \xrightarrow[\nu\to n]{} \frac{\Gamma(p+1-n)}{\Gamma(1-n)} \qquad n \in >-\infty,0>$$

$$\xrightarrow[\nu\to n]{} 0 \qquad n \in <1,p>$$

$$\frac{\Gamma(p+1-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} = (-1)^p (\nu-p)(\nu-(p-1))(\nu-(p-2))\ldots(\nu-2)(\nu-1)$$

$$= (-1)^p \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-p)} \xrightarrow[\nu\to n]{} (-1)^p \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-p)} \qquad n \in <p+1,+\infty<$$

1.10.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES DE $R - Z^- - \{0\}$

La notación de factorial se puede extender sobre $R - Z^- - \{0\}$ con la segunda definición de Γ. Se define entonces:

Def.: $\alpha! := \Gamma(\alpha+1) \qquad \alpha \in R - Z^- - \{0\}$

1.11.- DEFINICIÓN DE $1/\Gamma$ SEGUNDA DEFINICIÓN

La función Gamma $1/\Gamma$ (en su segunda definición) se puede definir sobre todos los reales. En efecto tomando para los valores de $Z^- \cup \{0\}$ el valor del límite que es 0 :

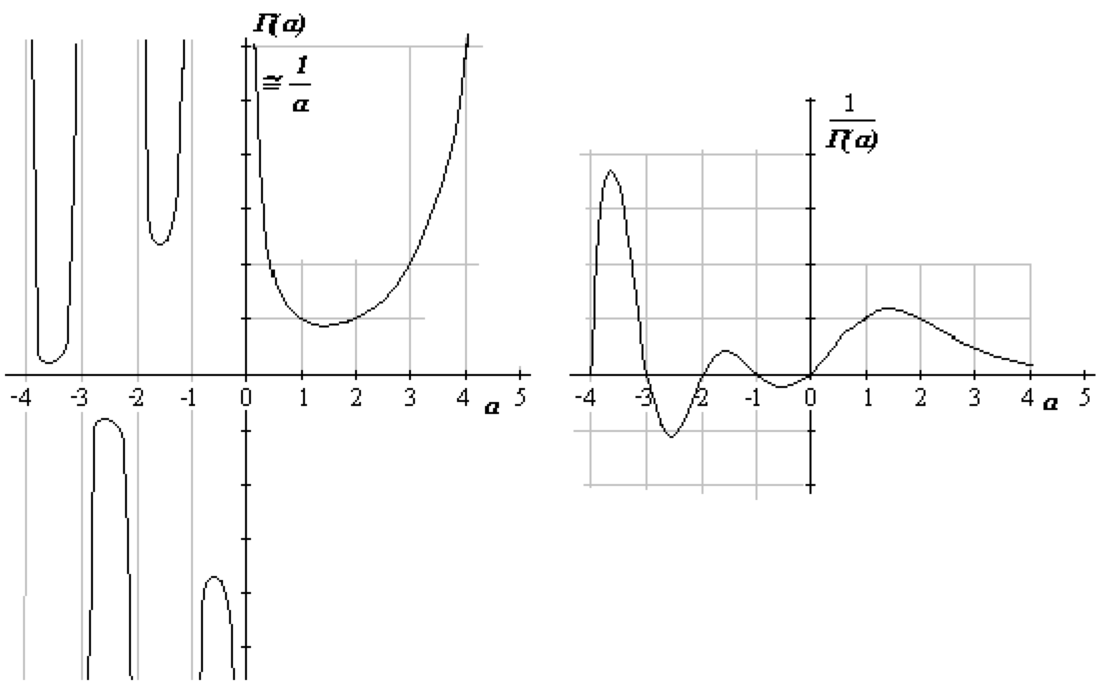
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \to -k]{} 0$$

Definición: $1/\Gamma : R \to R$

$$\alpha \to \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} & \alpha \neq Z^- \cup \{0\} \\ 0 & \alpha = Z^- \cup \{0\} \end{cases}$$

1.12.- REPRESENTACIÓN GRAFICA DE Γ Y DE $1/\Gamma$ SEGUNDA DEFINICIÓN

Las gráficas de la funciones Γ y $1/\Gamma$ para $\alpha \in R - Z^- - \{0\} > 0$ es:



1.13.- TERCERA DEFINICIÓN DE Γ

La segunda definición de la función Γ se hace para extender la segunda definición sobre el dominio $R - Z^{-} - \{0\}$ al dominio $C - Z^{-} - \{0\}$

Para los reales negativos se extiende por definición la validez de la Fórmula de Recurrencia

1.13.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma Γ (en su tercera definición) Euleriana de Segunda Especie:

Definición de Γ (tercera):

$$\Gamma : C - Z^{-} - \{0\} \to C$$

$$z \to \Gamma(z) := \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt & z \in C \wedge Re(z) > 0 \\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) & Re(z) \leq 0 \wedge z \notin Z^{-} \cup \{0\} \end{cases}$$

1.13.2.- ANÁLISIS DEL DOMINIO DE LA TERCERA DEFINICIÓN DE Γ

Se analiza por la Fórmula de Recurrencia el comportamiento de la función ***Γ (tercera definición)*** en los complejos para los valores enteros negativos y el cero.

En forma análoga a lo demostrado para la segunda definición de Γ

T_{11} ***Def Γ (tercera definición)*** $\Rightarrow z \in V(0) \quad \Gamma(z) \cong \dfrac{1}{z}$

$\Rightarrow z \in V(-1) \quad \Gamma(z) \cong \dfrac{1}{z+1}$

...

$\Rightarrow z \in V(-k) \quad \Gamma(z) \cong \dfrac{1}{z+k}$

1.14.- PROPIEDADES DE Γ (Tercera Definición)

1.14.1.- HOLOMORFÍA

T_{11} Def Γ(tercera definición) $\Rightarrow$ $\Gamma(z) \in H / C - Z^{-} - \{0\}$

La integral que define $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ sobre ***$z \in C \wedge Re(z) > 0$***

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x+iy-1}\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, t^{iy}\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, e^{iy\,Lt}\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, [\cos(y\,Lt) + i \sin(y\,Lt)]\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \cos(y\,Lt)\, dt + i \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \sin(y\,Lt)\, dt$$

Llamando

$$u(x\ y) := Re(\Gamma(z)) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \cos(y\,Lt)\, dt$$
$$v(x\ y) := Im(\Gamma(z)) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \sin(y\,Lt)\, dt$$

Ambas integrales cumplen con las hipótesis del teorema que da condiciones suficientes para cambiar el orden entre derivación e integral impropia:

$$\left.\begin{array}{ll} H_1 & f \in CP / t,\alpha \\ H_2 & \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \in CP / t,\alpha \\ H_3 & \displaystyle\int_{V+\infty} f \in CV \\ H_4 & \displaystyle\int_{V+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \in CU \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{V+\infty} f(t,\alpha)\, dt = \int_{V+\infty} \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha}\, dt$$

derivando:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \cos(y\,Lt)\, Lt\, dt$$
$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \sin(y\,Lt)\, Lt\, dt$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \sin(y\,Lt)\, Lt\, dt$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1} \cos(y\,Lt)\, Lt\, dt$$

se cumplen las condiciones de Cauchy Riemann y siendo además las derivadas continuas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \in \quad C/x,y$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \in \quad C/x,y$$

la función es Holomorfa

Γ(z) ∈ H/ [z∈ C ∧ Re(z) > 0]

que se extiende a por derivación de la fórmula de recurrencia a:

Γ(z) ∈ H/ C – Z⁻ – {0}

1.15.- EXTENSIÓN DEL FACTORIAL PARA VALORES DE C – Z⁻ – {0 }

La notación de factorial se puede extender sobre ***C – Z⁻ – {0}*** con la tercera definición de ***Γ.*** Se define entonces:

Def.: ***z! := Γ(z+1)*** ***z ∈ R – Z⁻ – {0}***

1.16.- DEFINICIÓN DE 1/Γ (Tercera Definición)

La función Gamma ***1/Γ*** (en su segunda definición) se puede definir sobre todos los reales tomando para los valores de ***Z⁻ ∪{0}*** el valor del límite que es 0 :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \xrightarrow[z \to -k]{} 0$$

Definición: ***1/Γ: C → C***

$$z \to \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(z)} & z \neq Z^- \cup \{0\} \\ 0 & z = Z^- \cup \{0\} \end{cases}$$

2.- FUNCIÓN BETA: FUNCIÓN EULERIANA DE PRIMERA ESPECIE

2.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE B

La función **B** tiene una primera definición sobre el dominio $\boldsymbol{R^+ x\, R^+}$ que más adelante se extenderá sobre los dominios

$\boldsymbol{D = (R - Z^- - \{0\}) \times (R - Z^- - \{0\})}$

$\boldsymbol{D = (C - Z^- - \{0\}) \times (C - Z^- - \{0\})}$

2.1.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Beta **B** (en su primera definición) Euleriana de Primera Especie:

Definición de B (primera): $\quad B : R^+ \times R^+ \to R$

$$(p\ q) \to B(p\ q) := \int_0^1 x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\ dx$$

Obs.: La justificación de que el dominio de **B** es efectivamente $\boldsymbol{R^+ x\, R^+}$ se obtiene del análisis de convergencia que sigue.

2.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANALISIS DE CV DE LA II

Se analiza la CV de la II anterior para justificar la definición.

1.- Existencia de la función integrando, salvo para puntos singulares aislados y puntos singulares:

$\exists f : \quad \forall x \in]\,0\ 1[\quad \exists\, x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}$

p.s. $V_{0+} \quad \forall p < 1$

$V_{1-} \quad \forall q < 1$

2.- Existencia de la Integral de Riemann sobre el Intervalo de Integración excluyendo los vecinales de los puntos singulares:

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\, dx \in IR \ \Leftarrow\ f \in C[\varepsilon_1\ \ 1-\varepsilon_2\,] \ :\ \forall i\ \varepsilon_\varepsilon > 0$$

3.1. Análisis de CV en V_{0+} : se compara con x^{p-1}

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1 \\ \displaystyle\int_{V0+} \frac{1}{x^{1-p}}\, dx \in CV \Leftrightarrow 1-p \prec 1 \ \Leftrightarrow\ p \succ 0 \quad [\text{Tabla } 2] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\, dx \in CV \ \Leftrightarrow\ p > 0$$

3.2.- Análisis de CV en V_{1-} : se compara con

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} \xrightarrow[x\to 1-]{} 1 \\ \displaystyle\int_{V1-} \frac{1}{(1-x)^{1-q}}\, dx \in CV \Leftrightarrow 1-q \prec 1 \ \Leftrightarrow\ q \succ 0 \quad [\text{Tabla } 2] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{V_{1-}} x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\, dx \in CV \ \Leftrightarrow\ q > 0$$

4.- Resumen

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \in CV \Leftrightarrow (p>0)\cap(q>0)$$

2.2.- OTRAS FORMAS DE B

Otras formas de la función ***B*** se obtienen por medio de cambios de variables. Por ejemplo:

2.2.1.- SEGUNDA FORMA DE B

$$\boldsymbol{T_1.-\quad Def\ B \Rightarrow B\,(p\,q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy}$$

Partiendo de

$$B\,(p\,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

se hace el cambio de variable

$$x = \frac{y}{1+y}$$

$$1-x = 1-\frac{y}{1+y} = \frac{1}{1+y}$$

$$1+y = \frac{1}{1-x}$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

Es decir:

$$x = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x}$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$dx = +\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

Reemplazando

$$B\,(p\,q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p-1}}\,\frac{1}{(1+y)^{q-1}}\,\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

$$B\,(p\,q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$$

2.2.2.- TERCERA FORMA DE B

$$\boldsymbol{T_2.-\quad Def\ B \Rightarrow B\,(p\,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\varphi\,\cos^{2q-1}\varphi\,d\varphi}$$

Partiendo de

$$B\,(p\,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

se hace el cambio de variable

$+x^{1/2} = \sin\varphi \iff \varphi = \text{Arc}\sin x^{1/2}$

$x = 0 \rightarrow \varphi = 0$

$x = 1 \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$dx = 2\sin\varphi\ \cos\varphi\ d\varphi$

Reemplazando

$$B(p\ q) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-2}\varphi\ \cos^{2q-2}\varphi\quad 2\ \sin\varphi\ \cos\varphi\ d\varphi$$

$$B(p\ q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\varphi\ \cos^{2q-1}\varphi\ d\varphi$$

Ejemplos:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^r\varphi\ \cos^2\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\ B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{s+1}{2}\right)$$

Caso particular

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Caso particular

$$\int_0^{\pi/2} \sin^r\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\ B\left(\frac{r+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{r}{2}+1)}$$

2.2.3.- CUARTA FORMA DE B

T_3.- ***Def B*** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{B(p\ q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{(1+e^t)^{p+q}}\ dt}$

$$B(p\ q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\ dx \xleftrightarrow{x=e^t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t(p-1)}}{(1+e^t)^{p+q}}\ e^t\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{(1+e^t)^{p+q}}\ dt$$

2.3.- PROPIEDADES DE B

2.3.1.- REDUCCIÓN DE B A Γ

T_1.-

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Def } B\\ \textbf{Def } \Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow B(p\,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad p > 0 \wedge q > 0$$

Sea el producto

$$\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{p-1}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}\, y^{q-1}\, dy\right)$$

que se puede transformar en Integral doble

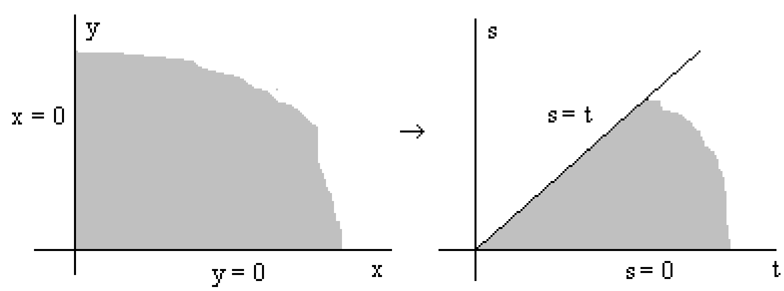
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dy\, dx$$

Haciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} t = x + y \\ s = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t - s \end{cases}$$

donde la Frontera del recinto de integración se transforma

$$x = 0 \rightarrow s = 0$$
$$y = 0 \rightarrow s = t$$
$$|\det J| = \left|\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right| = 1$$



Reemplazando

$$\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{t} e^{-t}\, s^{p-1}\,(t-s)^{q-1}\, ds\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\int_0^{t} s^{p-1}\,(t-s)^{q-1}\, ds\, dt$$

Con un nuevo cambio de variables en la integral interna

$$s = t\,u \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{s}{t}$$

$$s = 0 \rightarrow u = 0$$

$s = t \;\rightarrow\; u = 1$

$ds = t\,du$

$$\Gamma(p)\,.\,\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \int_0^1 (t\,u)^{p-1}\; t^{q-1}\; (1-u)^{q-1}\, t\, ds \quad dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\; t^{p+q-1} \int_0^1 u^{p-1}\,(1-u)^{q-1}\, du \quad dt$$

$$= B(p\;q) \quad \Gamma(p+q)$$

2.3.2.- SIMETRÍA DE B

T_2.- ***Def B*** $\Rightarrow$ ***B (p q) = B (q p)***

D_1 $$B\,(p\;q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p)}{\Gamma(q+p)} = B\,(q\;p)$$

D_2 $$B\,(p\;q) = \int_0^1 x^{p-1}\;(1-x)^{q-1}\;dx$$

Con el cambio de variables
$y = 1 - x \;\Leftrightarrow\; x = 1 - y$
$x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$
$x = 1 \;\rightarrow\; y = 0$
$dx = -\,dy$

$$B\,(p\;q) = \int_0^1 (1-y)^{p-1}\;y^{q-1}\;dy = B\,(q\;p)$$

2.3.3.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS

$$\textbf{\textit{T}}_{\mathbf{3}}\textbf{.-}\quad \left.\begin{array}{l} \textit{Def } B \\ \textit{Def } \Gamma \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(p)\;\;\Gamma(1-p) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi p)} \qquad\qquad p\in\,]\,0\;1\,[$$

Hay varias maneras de demostrar la Fórmula de los Complementos, a continuación se presenta la primera de ellas, otras se presentan en el Apéndice

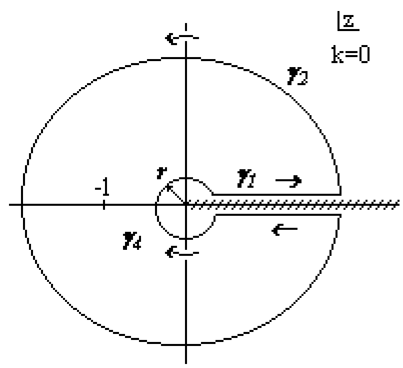
2.3.3.1.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: PRIMERA DEMOSTRACIÓN

D₁.- Una primera forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por cálculo de Residuos:

$$I(p) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \qquad\qquad p\in\,]\,0\;1\,[$$

Tomando la integral a lo largo del camino γ

$$I = \int_\gamma \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz$$



Por el Teorema de los Residuos:

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \;=\; 2\pi i\;R(-1)$$

γ_1: $z = x\,e^{\,i0}$ $\qquad \displaystyle\int_{\gamma_1} = \int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \;\xrightarrow[r\to 0+]{R\to+\infty}\; I$

γ_2: $\varphi\in\,]0\;\;2\pi]\quad z = r\,e^{+i\varphi}$ $\qquad \displaystyle L\;\;CSup|\,f\,| = 2\pi R\,\frac{R^{p-1}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{0<p<1} 0 \;\;\Rightarrow\;\; \int_{\gamma_2} \xrightarrow[R\to+\infty]{0<p<1} 0$

γ_3: $z = x\,e^{\,+i2\pi}$ $\qquad \displaystyle\int_{\gamma_3} = \int_{+R}^{r} \frac{x^{(p-1)}e^{i2\pi(p-1)}}{1+xe^{i2\pi}}\,e^{+i2\pi}\,dx \;\xrightarrow[r\to 0+]{R\to+\infty}\; -\,e^{-\,i2\pi\,p}\,I$

γ_4: $\varphi\in\,]2\pi\;\;0]\quad z = r\,e^{+i\varphi}$ $\qquad \displaystyle L\;\;CSup|\,f\,| = 2\pi r\,\frac{r^{p-1}}{1-r} \xrightarrow[r\to 0+]{0<p<1} 0 \;\;\Rightarrow\;\; \int_{\gamma_4} \xrightarrow[r\to 0+]{0<p<1} 0$

$$R(-1) = e^{+i\pi(p-1)} = -\,e^{+i\pi\,p}$$

Retomando

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2\pi i\ R(-1)$$

$$I \;+\; 0 \quad - e^{-i2\pi p}\, I + 0 \;=\; -\,2\pi i\ e^{+i\pi p}$$

$$I\ \frac{e^{+i\pi p} - e^{-i\pi p}}{2i} = \pi$$

Se obtiene entonces

$$I \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

Por otro lado

$$B\ (p\ q) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\ dy$$

$$B\ (p\ 1\text{-}p) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{1+y}\ dy \;=\; \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p)\ \ \Gamma(1-p)$$

De donde resulta la Fórmula de los Complementos

$$\Gamma(p)\ \ \Gamma(1-p) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

<u>2.3.4.- EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS</u>

Se puede extender la validez de la Fórmula de los Complementos a $\boldsymbol{p \in R - Z}$

$$\boldsymbol{T_4}\text{.-}\ \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{Def\,\Gamma} \\ \boldsymbol{p \in R - Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Gamma(p)\ \ \Gamma(1-p) \;=\; \frac{\pi}{\sin(\pi p)}}$$

Tomando por ejemplo

$$p \in\ ]1\ 2[\ \Rightarrow\ p-1 \in\ ]\,0\ 1[\qquad\qquad \Gamma(p) = (p-1)\ \Gamma(p-1)$$
$$\Rightarrow\ 1-p \in\ ]-1\ 0[\ \ \Rightarrow\ 2-p \in\ ]\,0\ 1[\qquad \Gamma(2\text{-}p) = (1-p)\ \Gamma(1-p)$$

Entonces para $p \in\ ]\ 1\ 2[$

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\ \ \Gamma(1-p) &= (p-1)\ \Gamma(p-1)\ \frac{\Gamma(2-p)}{(1-p)} \\
&= (-1)\ \Gamma(p-1)\ \Gamma(2-p) \\
&= (-1)\ \frac{\pi}{\sin(\pi(p-1))} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi p)}
\end{aligned}$$

Análogamente esto se extiende a $\boldsymbol{p \in R - Z}$

$p \notin \,]0\ 1[\quad p \notin Z$

$\Gamma(p) = (p-1)(p-2) \ldots (q+1)\, q\, \Gamma(q) \qquad : \quad q \in \,]0\ 1[$

$\Gamma(1\text{-}q) = (-q)(-q-1) \ldots (2-p)(1-p)\, \Gamma(1-p) \qquad : 1-q \in \,]0\ 1[$

$= (-1)^{p-q}\, (q)(q+1) \ldots (p-2)(p-1)\, \Gamma(1-p)$

$$\Gamma(p)\ \Gamma(1-p) = (-1)^{q-p}\,(p-1)(p-2) \ldots (q+1)\, q\, \Gamma(q)\ \frac{\Gamma(1-q)}{(p-1)(p-2)\ldots(q+1)q}$$

$$= (-1)^{q-p}\ \Gamma(q)\ \Gamma(1-q)$$

$$= (-1)^{q-p}\ \frac{\pi}{\sin(\pi q)}$$

$p-q = k \in \ \text{Par} \Rightarrow \ \sin(\pi q) = \sin(\pi(p+k)) = \ \sin(\pi p)$

$\in \ \text{Impar} \Rightarrow \ \sin(\pi q) = \sin(\pi(p+k)) = -\ \sin(\pi p)$

$$\Gamma(p)\ \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.3.5.- RELACIÓN CON LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

T_5.- Def B $\Rightarrow$ ***B (p q)*** $= \dfrac{p+q}{p \cdot q}\ \dfrac{1}{\dbinom{p+q}{p}}$ ***(p q)*** $\in N^2$

D.- $\quad B\,(p\ q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

$$= \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

$$= \frac{p+q}{p.\,q}\ \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

$$= \frac{p+q}{p.\,q}\ \frac{1}{\dbinom{p+q}{p}}$$

2.3.6.- FÓRMULA DE DUPLICACION PARA P $\in$ ***R^+***

T_6.- Def B $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\Gamma(2p) = \dfrac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma(p)\ \Gamma(p+\dfrac{1}{2})}$ ***Fórmula de Duplicación para n$\in$ R$^+$***

$$B(p\ p) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\varphi\ \cos^{2p-1}\varphi\ \ d\varphi$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\ 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(2\varphi)\ d\varphi$$

$$\xrightarrow{\theta=2\varphi} = \frac{1}{2^{2p-1}}\ 2\ \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^{2p-1}(\theta)\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\ 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(\theta)\ d\theta$$

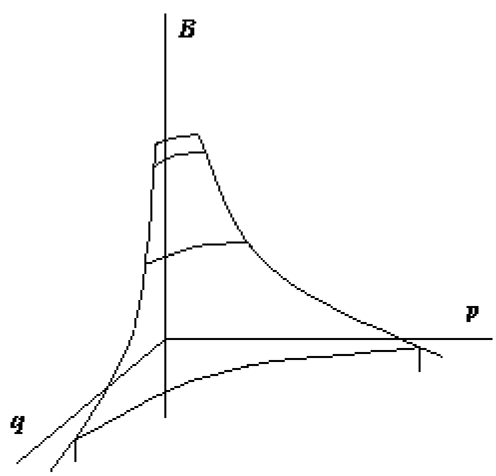
$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\ B(p, \frac{1}{2})$$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}\ \frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}$$

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\ \Gamma(p)\ \Gamma(p+\boldsymbol{\frac{1}{2}})$$

2.4.- REPRESENTACION GRAFICA DE B (PRIMERA DEFINICION)

La gráfica de la función ***B*** para ***p >0 y q >0*** es:



2.5.- SEGUNDA DEFINICIÓN DE B

La segunda definición de la función ***B*** se hace para extender la primera definición al dominio $\boldsymbol{R}^2$ que en rigor será $\boldsymbol{D = [\,R - Z^- - \{\,0\,\}\,]^2}$

La extensión se basa en la Fórmula que relaciona a ***B*** con $\boldsymbol{\Gamma}$

2.5.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Beta ***B*** (en su segunda definición) o Función Euleriana de Primera Especie:

Definición de B (segunda):

$$B : [R - Z^- - \{\,0\,\}]^2 \rightarrow R$$

$$(p\ q) \rightarrow B\,(p\ q) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 x^{\,p-1}\ (1-x)^{\,q-1}\ dx & (\,p\ \ q\,) \in (\,R^+\,)^2 \\ \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} & (\,p\ \ q\,) \in [R - Z^- - \{\,0\,\}]^2 \end{cases}$$

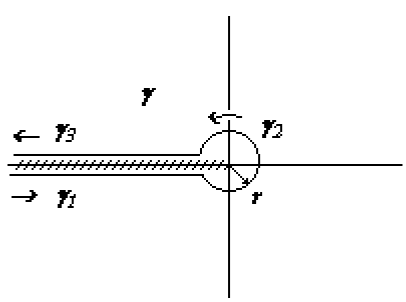
2.6.- OTRAS PROPIEDADES DE B Y Γ

2.6.1.- OTRA FORMA DE Γ (TERCERA FORMA)

$$T_1.- \left.\begin{matrix} 3^a\ Def\ \Gamma \\ Re(\alpha) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\leftarrow \\ \rightarrow}\!\equiv o} \frac{e^z}{z^{\alpha+1}}\, dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Tomando la integral a lo largo del camino γ

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\leftarrow \\ \rightarrow}\!\equiv o} \frac{e^z}{z^{\alpha+1}}\, dz$$



$$2\pi i\ I = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}$$

γ_1: $z = x\, e^{-i\pi}$ $\qquad \int_{\gamma_1} = \int_{+R}^{r} \frac{e^{xe^{-i\pi}}}{x^{\alpha+1} e^{-i\pi(\alpha+1)}}\, e^{-i\pi}\, dx \xrightarrow[r\to 0+]{R\to+\infty} e^{+i\pi\alpha} \int_0^{+\infty} x^{-(\alpha+1)}\, e^{-x}\, dx$

γ_2: $\varphi \in]-\pi\ \ \pi]$ $\quad z = r\, e^{+i\varphi}$ $\qquad L\ \ CSup|\, f\,| = 2\pi r\, \frac{e^{r\cos\varphi}}{r^{\alpha+1}} \xrightarrow[r\to 0+]{Re(\alpha)<0} 0 \ \Rightarrow\ \int_{\gamma_2} \xrightarrow[r\to 0+]{Re(\alpha)<0} 0$

γ_3: $z = x\, e^{+i\pi}$ $\qquad \int_{\gamma_3} = \int_{r}^{R} \frac{e^{xe^{+i\pi}}}{x^{\alpha+1} e^{i\pi(\alpha+1)}}\, e^{+i\pi}\, dx \xrightarrow[r\to 0+]{R\to+\infty} e^{-i\pi\alpha} \int_0^{+\infty} x^{-(\alpha+1)}\, e^{-x}\, dx$

$$I = \frac{e^{+i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2\pi i} \int_0^{+\infty} x^{-(\alpha+1)}\, e^{-x}\, dx$$

$$I = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\, \Gamma(-\alpha)$$

Por la Fórmula de los Complementos

$$\Gamma(-\alpha)\ \ \Gamma(\alpha+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Obs.: El resultado también es válido sobre R

2.6.2.- VALORES NOTABLES $\Gamma'(\frac{1}{2})$

$$T_2.- \left.\begin{matrix} Def\ \Gamma \\ Def\ B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -2\,L2 + \Gamma'(1)$$

D$_1$.- *A partir de la fórmula de duplicación*

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(p)\, \Gamma(p+\frac{1}{2})$$

derivando en forma logarítmica:

$$2\,\frac{\Gamma'(2p)}{\Gamma(2p)} = 2\,L2 + \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} + \frac{\Gamma'(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})}$$

$$2\,\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 2\,L2 + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

para $p = \frac{1}{2}$

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\ 2\,L2 + \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -\ 2\,L2 + \Gamma'(1)$$

D_2.- *A partir de $B(p\ \frac{1}{2})$*

$$B(p, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\varphi \ d\varphi$$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\varphi \ d\varphi$$

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \left[\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma'(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \right] = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\varphi \ L\sin\varphi \ d\varphi$$

para $p = \frac{1}{2}$

$$\pi \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1) \right] = 4 \int_0^{\pi/2} L\sin\varphi \ d\varphi$$

Calculando

$$I = \int_0^{\pi/2} L\sin\varphi \ d\varphi \xleftrightarrow{\varphi=\pi/2-\theta} = \int_0^{\pi/2} L\cos\theta \ d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} L\sin\varphi \ d\varphi \xleftrightarrow{\varphi=\pi-\theta} = \int_{\pi/2}^{\pi} L\sin\theta \ d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} L\sin\varphi \ d\varphi = 2I$$

$$\int_0^{\pi/2} L\sin 2\varphi \ d\varphi \xleftrightarrow{2\varphi=\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} L\sin\theta \ d\theta = I$$

$$I = \int_0^{\pi/2} L\sin 2\varphi \ d\varphi = \int_0^{\pi/2} L\,(2\sin\varphi\cos\varphi) \ d\varphi =$$

$$I = \int_0^{\pi/2} L2 \ d\varphi + \int_0^{\pi/2} L\sin\varphi \ d\varphi + \int_0^{\pi/2} L\cos\varphi \ d\varphi$$

$$I = \frac{\pi}{2} L2 + I + I$$

$$I = -\frac{\pi}{2} L2$$

Retornando a

$$\pi \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1) \right] = 4 \int_0^{\pi/2} L\sin\varphi \ d\varphi$$

$$\pi \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma'(1) \right] = 4 \left(-\frac{\pi}{2} L2\right)$$

Se llega a

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -2L2 + \Gamma'(1)$$

Obs.: A partir de la primera Demostración :

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} = -\ 2\ L2\ + \Gamma\ '(1)$$

y sabiendo de la primera parte de la segunda Demostración

$$\pi\ [\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \Gamma\ '(1)]\ = 4\ \int_0^{\pi/2} L\ \sin\varphi\ d\varphi$$

se puede extraer:

$$I = \int_0^{\pi/2} L\ \sin\varphi\ d\varphi\ = -\ \frac{\pi}{2}\ L2$$

2.7.- TERCERA DEFINICION DE B

La segunda definición de la función ***B*** se hace para extender la segunda definición sobre el dominio $[R - Z^- - \{0\}]^2$ al dominio $[C - Z^- - \{0\}]^2$

Para los reales negativos se extiende por definición la validez de la Fórmula de Recurrencia

2.7.1.- DEFINICION

Se llama función Gamma ***B*** (en su tercera definición) Euleriana de Segunda Especie:

Definición de B (tercera):

$$B : [C - Z^- - \{0\}]^2 \rightarrow C$$

$$(p\ q) \rightarrow B\ (p\ q) := \begin{cases} \int_0^1 x^{p-1}\ (1-x)^{q-1}\ dx & (p\ q) \in C^2 \wedge Re(p) > 0 \wedge Re(q) > 0 \\ \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} & (p\ q) \in [C - Z^- - \{0\}]^2 \end{cases}$$

3.- FUNCIÓN GAMMA INCOMPLETA

Análogamente a las definiciones hechas para la función Γ existen varias definiciones de la función ***Γ incompleta*** a partir de sucesivas extensiones del Dominio, a saber:

$D = R^{+}$
$D = R - Z^{-} - \{0\}$
$D = C - Z^{-} - \{0\}$

3.1.- PRIMERA DEFINICIÓN DE Γ INCOMPLETA

3.1.1.- DEFINICIÓN

Se llama función Gamma ***Γincompleta*** (en su primera definición sobre el dominio R^{+}):

Definición de Γincompleta (Primera): $\Gamma: R^{+}xR \to R$

$$(\alpha,x) \to \Gamma(\alpha,x) := \int_0^x e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

1.1.2.- JUSTIFICACIÓN DE LA DEFINICIÓN: ANALISIS DE CV DE LA II

Se analiza la CV de la II anterior para justificar la definición.

1.- Existencia de la función integrando, salvo para puntos singulares aislados y los puntos singulares

$\exists f: \quad \forall x \in]0\ A[\quad \exists \ e^{-t}\ t^{\alpha-1}$

Puntos singulares:
p.s. $V_{0+} \quad \forall \alpha < 1$

2.- Existencia de la Integral de Riemann sobre el Intervalo de Integración excluyendo los vecinales de los puntos singulares:

$$\int_a^x e^{-t}\ t^{\alpha-1}\, dt \in IR \Leftarrow f \in C[a\ x] \ : \ a > 0$$

3.- Análisis de CV en V_{0+} : se compara con $t^{\alpha-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{-t}t^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}} = \dfrac{e^{-t}t^{\alpha-1}}{1/t^{1-\alpha}} \xrightarrow[t\to 0+]{} 1 \\ \displaystyle\int_{V0+} \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}\, dt \in CV \Leftrightarrow 1-\alpha \prec 1 \Leftrightarrow \alpha \succ 0 \ \ [Tabla\ 2] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{V_{0+}} e^{-t}\ t^{\alpha-1}\, dt \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

4.- Resumen de CV

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \in CV \Leftrightarrow \alpha > 0$$

APENDICE III

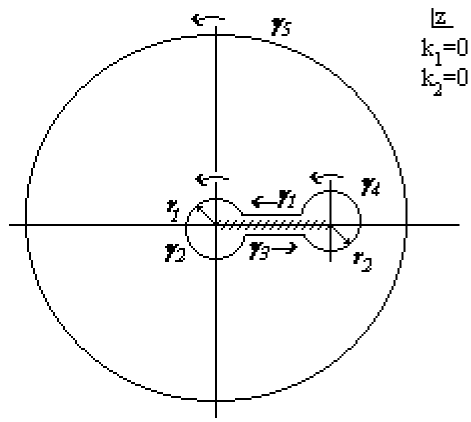
2.3.3.2.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

D_2.- Una segunda forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por cálculo de Residuos:

$$I(p) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{-p}\,dx \qquad p \in\,]0\;1[$$

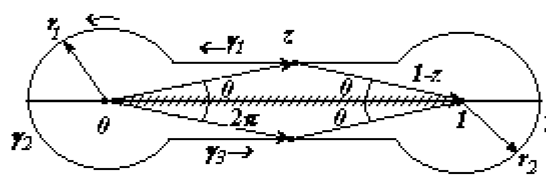
Tomando la integral a lo largo del camino γ

$$I = \int_\gamma z^{p-1}\,(1-z)^{-p}\,dz$$



Por el 2° Corolario del Teorema de Cauchy

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \int_{\gamma_5}$$



γ_1: $z = x\,e^{i0}$ $\quad 1-z = (1-x)\,e^{i0}$ $\qquad \displaystyle\int_{\gamma_1} = \int_{-r_2}^{r_1} x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx \xrightarrow[\substack{r_2\to 0+\\ r_1\to 0+}]{} -I$

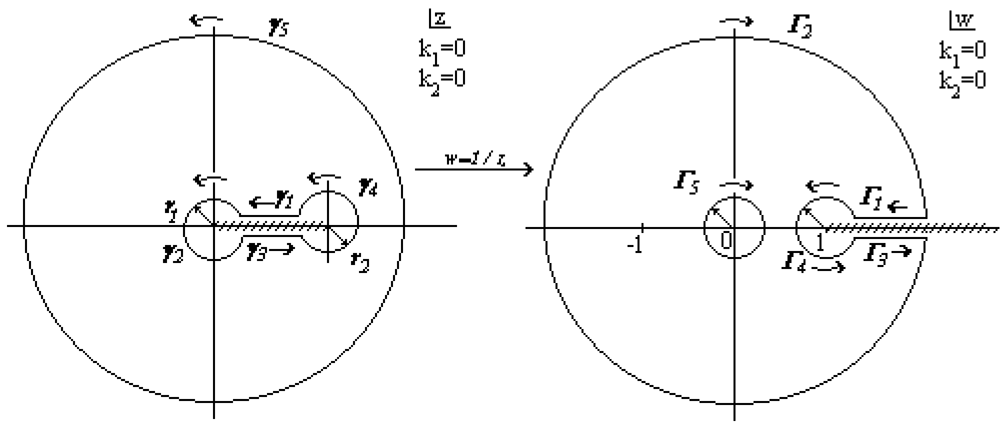
γ_2: $\varphi \in\,]0\;\;2\pi]$ $\quad z = r_1\,e^{+i\varphi}$ $\qquad L\,\mathrm{CSup}|\,f\,| = 2\pi r_1\;r_1^{\,p-1}(1-r_2)^{-p} \xrightarrow[\substack{0<p\\ r_1\to 0+}]{} 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_{\gamma_2} \xrightarrow[\substack{0<p\\ r_1\to 0+}]{} 0$

γ_3: $z = x\,e^{+i2\pi}$ $\quad 1-z = (1-x)\,e^{i0}$ $\qquad \displaystyle\int_{\gamma_3} = \int_{r_1}^{1-r_2} x^{p-1}\,e^{+i2\pi(p-1)}\,(1-x)^{-p}\,e^{+i2\pi}\,dx \xrightarrow[\substack{r_2\to 0+\\ r_1\to 0+}]{} +e^{+i2\pi p}\,I$

γ_4: $\varphi \in\,]\,2\pi\;\;0]$ $\quad z = r_2\,e^{+i\varphi_2}$ $\qquad L\;\mathrm{CSup}|\,f\,| = 2\pi r_2\;(1-r_1)^{p-1}\,r_2^{\,-p} \xrightarrow[\substack{p<1\\ r_2\to 0+}]{} 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_{\gamma_4} \xrightarrow[\substack{p<1\\ r_2\to 0+}]{} 0$

Para obtener la integral sobre $\boldsymbol{\gamma_5}$ *se aplica la inversión:*

γ_5: $\varphi \in [\,0 \;\; 2\pi]$ $\quad z = R\, e^{+i\varphi}$ $\quad \xrightarrow{w=1/z} \quad$ Γ_5: $\Phi \in [\,0 \;\; -2\pi]$ $\quad w = R^{-1}\, e^{-i\Phi}$



$$\int_{\gamma_{5+}} = \int_{\Gamma_{5-}} \frac{1}{w^{p-1}} \quad (1-\frac{1}{w})^{-p}\,(-\frac{1}{w^2}) \quad dw$$

$$= \int_{\Gamma_{5+}} \frac{(w-1)^{-p}}{w} \quad dw$$

$$= 2\pi i\, R(0)$$

donde

$$R(0) = (-1)^{-p} = e^{-i\pi(-p)} = e^{-i\pi p}$$

Retomando

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \int_{\gamma_5}$$

$$-I \;+\; 0 \;+\; e^{+i2\pi p}\, I \;+\; 0 \;=\; 2\pi i\;\; e^{-i\pi p}$$

$$I \;\; \frac{e^{+i\pi p} - e^{-i\pi p}}{2i} \;= \pi$$

Se obtiene entonces

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.3.3.3.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: TERCERA DEMOSTRACIÓN

D₃.- Una tercera forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por cálculo de Residuos:

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx \xleftrightarrow{x=e^t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t(p-1)}}{1+e^t}\, e^t\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\, dt \qquad p\in]\,0\ 1[$$

Tomando la integral a lo largo del camino γ

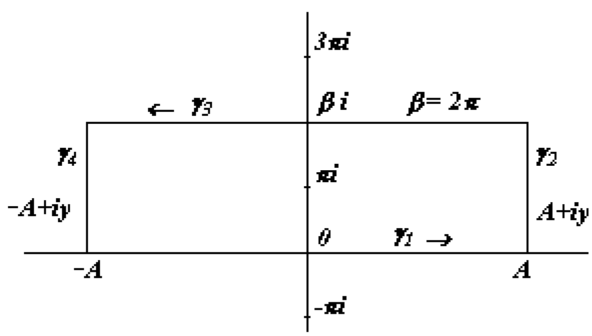
$$I = \int_\gamma \frac{e^{pz}}{1+e^z}\, dz$$

La función integrando no tiene puntos de ramificación, pero tiene Polos en

$1+ e^t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = (\pi + 2k\pi)\, i$

que son todos de primer orden. Para que se incluya un solo Polo en el recinto de integración, se elige

$\beta \in\ ]\pi\ \ 3\pi[$



Por el Teorema de los Residuos:

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2\pi i\ R(\pi i\ )$$

γ_1: $z = t$ $\qquad \int_{\gamma_1} = \int_{-A}^{A} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\, dt \xrightarrow[A\to+\infty]{} I$

γ_2: $y\in]0\ \ \beta]$ $\quad z = A+iy$ $\quad L\ CSup|\,f\,| = \beta\, \frac{e^{pA}}{e^A - 1} = \beta\, \frac{e^{(p-1)A}}{1-e^{-A}} \xrightarrow[\substack{0<p<1\\ A\to+\infty}]{} 0 \ \Rightarrow\ \int_{\gamma_2} \xrightarrow[\substack{0<p<1\\ A\to+\infty}]{} 0$

γ_3: $z = t + i\beta$ $\qquad \int_{\gamma_3} = \int_{A}^{-A} \frac{e^{p(t+i\beta)}}{1+e^{t+i\beta}}\, dt \xrightarrow[\substack{\beta=2\pi\\ A\to+\infty}]{} -I\, e^{\,i2\pi p}$

Para obtener una ecuación con una sola incógnita, al aplicar el Teorema de los residuos se elige $\beta = 2\pi$

γ_4: $y\in]\beta\ \ 0]$ $\quad z = -A+iy$ $\quad L\ CSup|\,f\,| = \beta\, \frac{e^{-pA}}{e^{-A} - 1} = \xrightarrow[\substack{0<p<1\\ A\to+\infty}]{} 0 \ \Rightarrow\ \int_{\gamma_4} \xrightarrow[\substack{0<p<1\\ A\to+\infty}]{} 0$

El cálculo del Residuo en πi

$$R(\pi i) = - e^{+i\pi p}$$

Retomando

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = 2\pi i\, R(\pi i)$$

$$I + 0 - e^{-i2\alpha p}\, I + 0 = -2\pi i\, e^{+i\pi p}$$

$$I\; \frac{e^{+i\pi p} - e^{-i\pi p}}{2i} = \pi$$

Se obtiene entonces

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

2.3.3.4.- FÓRMULA DE LOS COMPLEMENTOS: CUARTA DEMOSTRACIÓN

D_4.- Una cuarta forma de llegar a la Fórmula de los Complementos es en el Campo Complejo por medio de la Serie de Fourier Trigonométrica:

$$\boldsymbol{I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx}$$

1.1.- Cambiando de variable $x = e^t$

$$I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx \xleftrightarrow{x=e^t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t(p-1)}}{1+e^t}\, e^t\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\, dx \qquad p \in\,]\,0\ 1[$$

Se puede construir una función $g(p)$ definida en $p \in\,]\,0\ 1[$

$$g(p) = \sin(\pi p) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$$

$$g(p) = \sin(\pi p) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\, dt$$

1.2.- La función $g(p)$ se desarrollará en Serie de Fourier como función par en el intervalo $p \in\,]{-1}\ 1[$ donde resulta entonces un período $T=2$.

Obs.: $g(p)$ es indeterminada para $p=0$ y $p=1$ pero su límite en ambos casos es π

$$g(p) = \sin(\pi p)\, \Gamma(p)\Gamma(1-p) \approx \sin(\pi p)\, \frac{1}{p}\, \Gamma(p+1)\, \Gamma(1-p) \xrightarrow[p\to 0]{} \pi$$

$$g(p) = \sin(\pi p)\, \Gamma(p)\Gamma(1-p) \approx \sin(\pi(1-p))\, \Gamma(p)\, \frac{1}{1-p}\, \Gamma(2-p) \xrightarrow[p\to 1]{} \pi$$

Desarrollando como función par

$b_k = 0$

$$a_k = 2\int_0^1 \sin(\pi p)\ I(p)\cos(k\pi p)\ dp = \int_0^1 I(p)\ [\ \sin((k+1)\pi p) - \sin((k-1)\pi p)\ ]\ dp$$

1.3.- Se calcula

$$G(n) = \int_0^1 \sin(n\pi p)\ I(p)\ dp = \int_0^1 \sin(n\pi p)\ [\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{pt}}{1+e^t}\ dt\ ]\ dp$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\ [\int_0^1 e^{pt}\ \sin(n\pi p)\ dp]\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\ [\ \frac{e^{pt}}{t^2+(n\pi)^2}\ [\ t\sin(n\pi p) - n\pi\cos(n\pi p)]]\Big|_0^1\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\ [\ \frac{n\pi}{t^2+(n\pi)^2}\ [\ 1-(-1)^n e^t]]\ dt$$

que para $n \in$ Impar

$$G(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\pi}{t^2+(n\pi)^2}\ dt = \pi$$

y que para $n \in$ Par

$$G(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-e^t}{1+e^t}\ \frac{n\pi}{t^2+(n\pi)^2}\ dt$$

Que es la Integral de una función impar $\Rightarrow$ $G(n) = 0$

1.4.- Se calcula ahora los a_0 y los a_k

$$a_0 = \int_0^1 I(p)\ [\ \sin(\pi p) - \sin((-1)\pi p)\ ]\ dp$$

$$= 2\int_0^1 I(p)\sin(\pi p)\ dp$$

$$= 2\ G(1) = 2\pi$$

$$\frac{a_0}{2} = \pi$$

$$a_k = \int_0^1 I(p)\ [\ \sin((k+1)\pi p) - \sin((k-1)\pi p)\ ]\ dp$$

$$= G(k+1) - G(k-1) = 0$$

1.5.- Entonces la Serie de Fourier es

$$g(p) = \sin(\pi p)\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\ dx = \pi$$

Se obtiene la formula de los complementos

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$$