NOTAS PARA LOS ALUMNOS DEL CURSO DE ANALISIS MATEMATICO III

TEORÍA DE CONJUNTOS

Ing. Juan Sacerdoti

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática

Universidad de Buenos Aires

2003

V 2.03

ÍNDICE

2.- TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1.- SÍMBOLOS BÁSICOS PRIMITIVOS O INDEFINIDOS Y SÍMBOLOS DE PUNTUACIÓN
2.1.1.- SÍMBOLOS BÁSICOS OBJETOS O ENTES
2.1.2.- SÍMBOLOS BÁSICOS CONECTIVOS
2.1.3.- SÍMBOLOS DE PUNTUACIÓN

2.2.- PRIMERAS RELACIONES BÁSICAS - EXPRESIÓN DE PERTENENCIA A UN CONJUNTO
2.2.1.- SÍMBOLO BÁSICO CONECTIVO: SER O PERTENECER A UN CONJUNTO
2.2.2.- PORQUE CONJUNTO

2.3.- SÍMBOLO BÁSICO NEGACIÓN (NOT)
2.3.1.- EXPRESIÓN DE NEGACIÓN DE PERTENENCIA A UN CONJUNTO
2.3.2.- SINÓNIMO

2.4.- SÍMBOLO BÁSICO SIMULTÁNEIDAD (AND)
2.4.1.- EXPRESIÓN DE SIMULTÁNEIDAD DE PERTENENCIA A UN CONJUNTO
2.4.2.- SINÓNIMO
2.4.3.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO INTERSECCIÓN

2.5.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO COMPLEMENTARIO DE A SOBRE B

2.6.- SÍMBOLO BÁSICO PARA TODO (ALL)
2.6.1.- EXPRESIÓN DE PARA TODO ELEMENTO DE UN CONJUNTO. INCLUSIÓN
2.6.2.- SINÓNIMOS
2.6.3.- DEFINICIÓN DE EXISTE UN ELEMENTO DEL CONJUNTO
2.6.4.- SINÓNIMO: NO INCLUSIÓN
2.6.5.- DEFINICIÓN DE PROPIEDAD DE CONJUNTO VACÍO Y DEFINICIÓN DE CONJUNTO VACÍO
2.6.5.1.- DEFINICIÓN DE PROPIEDAD DE CONJUNTO VACÍO
2.6.5.2.- SINÓNIMO: DEFINICIÓN DE CONJUNTO VACÍO
2.6.6.- DEFINICIÓN DE IGUALDAD DE CONJUNTOS
2.6.7.- DEFINICIÓN DE DESIGUALDAD DE CONJUNTOS
2.6.8.- DEFINICIÓN DE IDENTIDAD DE ELEMENTOS DE CONJUNTOS

2.7.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO COMPLEMENTO DE A DENTRO DE B, UNIÓN, Y PARTICIÓN.
2.7.1.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO UNIVERSO
2.7.2.- DEFINICIÓN DE COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO A INCLUIDO EN OTRO CONJUNTO E (UNIVERSO)
2.7.3.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO UNIÓN
2.7.4.- PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

2.8.- RED DE SÍMBOLOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y LÓGICA

MATEMÁTICA

2.- TEORÍA DE CONJUNTOS

La matemática como lenguaje se puede estructurar a partir de la Teoría de Conjuntos.

2.1.- SÍMBOLOS BÁSICOS PRIMITIVOS O INDEFINIDOS Y SÍMBOLOS DE PUNTUACION

Los símbolos primitivos para armar expresiones matemáticas y consecuentemente una red matemática, son los del modelo o Teoría de Conjuntos cuyos entes, conectivos y puntuación se pueden presentar como:

Objetos o Entes ***x, A,...*** ***(elementos y Conjuntos)***
Conectivos $\in$ / $\wedge$ $\forall$
Puntuación **. , : ; .. ... ' ''( ) [] {}** $\rightarrow$ **:=**

Estos símbolos son aquellos donde se empieza a construir la Red Matemática.

Obs.: Nótese que como toda red es arbitraria, podrían haberse definidos otros primitivos como por ejemplo:

Unión en lugar de intersección.
Existencia en lugar de Para Todo.
Etc.

O sea podría haber otra presentación de símbolos básicos. La elección es sobre la base del principio de economía, o sea la simplicidad de la red.

2.1.1.- SÍMBOLOS BÁSICOS: OBJETOS O ENTES

Estos símbolos representan a los ***objetos o entes*** del Sistema bajo estudio. Esto significa tantos a los ***elementos*** como a los ***Conjuntos.***

En principio son los ***sustantivos*** básicos del idioma corriente.

Los símbolos básicos objetos no tienen definición, o sea no son reducibles a otros símbolos, pero también tienen una ***asignación arbitraria símbolo - objeto*** que debe por supuesto identificar unívocamente el objeto para aplicar los modelos que se construyan.

Ello no obsta que un mismo modelo pueda aplicarse a distintos objetivos variando la asignación de los entes. La relatividad de los símbolos básicos se observa en los siguientes ejemplos:

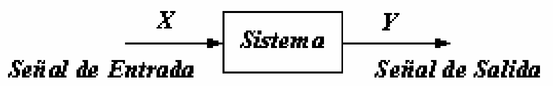
Ejemplo 1: En la Geometría Euclídea dos conceptos primitivos, o sea símbolos básicos como el punto y la recta pueden ser intercambiados entre sí sin cambiar la validez del modelo.

Tomando rectas no paralelas (incidentes) es valido el intercambio:

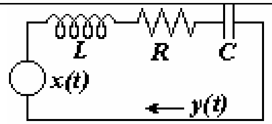
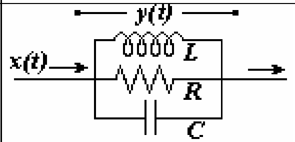
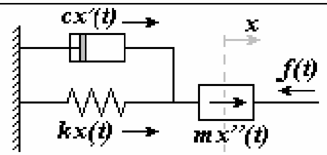
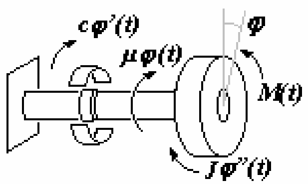
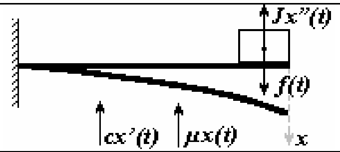
Dos rectas no coincidentes definen uno y solo un punto.
Dos puntos no coincidentes definen una y solo una recta.

Ejemplo 2: En el modelo el Álgebra Lineal la palabra vector puede ser representativa de una inmensa cantidad de entes distintos: fuerzas físicas, funciones, series, integrales, diferenciales, ecuaciones lineales, soluciones de ecuaciones lineales tanto algebraicas como diferenciales, etc. etc.

Ejemplo 3: Los modelos de Sistemas Lineales representados por una Ecuación Diferencial de segundo orden y de coeficientes constantes: $a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = x(t)$ que ligan la salida con la entrada del Sistema



$$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = x(t)$$

	Esquema del modelo	*Ecuación*	*Entrada*	*Salida*	*a*	*b*	*c*
Sistema general		$a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = x(t)$	*x(t)*	*y(t)*	*a*	*b*	*c*
Circuito Eléctrico Serie		$L\,i'(t)+R\,i(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(w)dw = u(t)$ $L\,q''(t)+R\,q(t)+\frac{1}{C}q(t) = u(t)$	*Tensión Eléctrica u(t)*	*Corriente eléctrica i(t)*	*Inductancia L*	*Resistencia R*	*1/capacitancia 1/C*
Circuito Eléctrico Paralelo		$Cu'(t)+\frac{1}{R}u(t)+\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(w)dw=i(t)$	*Corriente eléctrica i(t)*	*Tensión Eléctrica u(t)*	*Capacitancia C*	*1/Resistencia 1/R*	*1/Inductancia 1/L*
Vibración longitudinal		$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = f(t)$	*Fuerza excitatriz f(t)*	*Movimiento x(t)*	*Masa m*	*Coeficiente de amortiguamiento c*	*Constante Elástica k*
Vibración Angular		$J\,\varphi''(t) + c\varphi'(t) + \mu\,\varphi(t) = M(t)$	*Par excitatriz M(t)*	*Movimiento Angular φ(t)*	*Momento de Inercia J*	*Coeficiente de amortiguamiento c*	*Constante Elástica Torsional μ*
Vibración de ménsulas		$J\,x''(t) + cx'(t) + \mu\,x(t) = f(t)$	*Fuerza excitatriz f(t)*	*Movimiento x (t)*	*Momento de Inercia J*	*Coeficiente de amortiguamiento c*	*Constante Elástica μ*

2.1.2.- SÍMBOLOS BÁSICOS CONECTIVOS

Los conectivos, que son los símbolos que representan a las interrelaciones entre los elementos del sistema. Ejemplos de conectivos son:

1.- ***Ser o Pertenecer* [∈]** que es el que establece la relación pertenencia de un elemento a un conjunto.

2.- ***Negación* [/]** que es el que establece la relación de negación de la pertenencia de un elemento a un conjunto.

3.- ***Simultaneidad* [∧]** que es el que establece la relación doble de pertenencia de un elemento a dos conjuntos.

4.- ***Para Todo* [∀]** que es el que establece la relación de inclusión de conjuntos. También es equivalente a la definición de existencia de un elemento de un conjunto. O sea que el conjunto es no vacío.

Cada uno de ellos va acompañado por un axioma o regla de armado, que indica como se emplea el símbolo en las expresiones compuestas, incluyendo los símbolos de puntuación pertinentes. Son las reglas de la gramática del lenguaje.

2.1.3.- SÍMBOLOS DE PUNTUACIÓN

Los ***símbolos de puntuación*** que son el tercer tipo de símbolos de un Lenguaje cuyo ***objeto*** es propio del mismo lenguaje para la ***construcción expresiones de forma de cadenas, árboles o estructuras más complejas*** de símbolos como por ejemplo redes. Los símbolos de puntuación y su empleo más común en la teoría de conjuntos y en matemática en general son los siguientes:

Símbolos de puntuación := { . , ; : .. ... – ( ) [ ] {} := →}

Símbolo	***Empleo usual***
.	***Fin de expresión***
, ;	***Separador de elementos o partes de expresión***
:	***Tal que***
..	***Desde hasta***
...	***Desde hasta***
( ) [ ] { }	***Secuencia de lectura (u operación)***
:=	***Asignación***
→	***Secuencia dentro de un árbol***

Entre otras funciones se emplean en

1.- Asignaciones de símbolos nuevos (definiciones)
2.- Separar cadenas
3.- Fijar ordenar de secuencias en las cadenas. Por ejemplo los paréntesis.
4.- Dar las bifurcaciones en un árbol. Por ejemplo las flechas.

2.2.- PRIMERAS RELACIONES BÁSICAS - EXPRESIÓN DE PERTENENCIA A UN CONJUNTO

2.2.1.- SÍMBOLO BÁSICO CONECTIVO: SER O PERTENECER A UN CONJUNTO

Se introduce el conectivo $\in$ con la expresión (relación de símbolos)

Símbolo básico ser o pertenecer : Reglas de uso:

Se representa un ***Elemento*** x que ***pertenece*** a un ***Conjunto*** A.

$x \in A$

x : Elemento del Conjunto
$\in$: Conectivo de Pertenencia o Ser
A : Conjunto

Obs 1: Nótese que los objetos que se conectan con el conectivo ser ***[$\in$]*** Son el elemento y el Conjunto. Esto significa que estos conceptos se crean simultáneamente.

Una segunda forma de representar la pertenencia (sinónimo) es por la expresión:

$A := \{x, y, z,...\}$

donde se presentan explícitamente los elementos del conjunto.

Obs 2: La notación $A := \{ x_1\ x_2 \ldots\ x_n \}$ no es general, solo vale para conjuntos numerables.

Obs 3: Otra notación $A := \{ x: Prop(x) \}$ puede emplearse solamente después de haber definido. Proposición en Lógica más adelante.

2.2.2.- PORQUÈ CONJUNTO

La importancia de Conjunto esta dado por la simplicidad (facilidad, claridad, comodidad) con que a partir de el se puede estructurar una red de símbolos básicos con los principales conceptos de la matemática, cuya lista obvia otro comentario:

1.- Par Ordenado
2.- Producto Cartesiano
3.- Relación
4.- Función
5.- Relación de Equivalencia
6.- Relación de Orden
7.- Numero Natural
8.- Numero Entero
9.- Numero Fraccionario
10.- Estructura Lineal (Vectorial)
11.- Estructura Métrica
12.- Numero Complejo
Etc.

2.3.- SÍMBOLO BÁSICO NEGACIÓN (NOT)

2.3.1.- EXPRESIÓN DE NEGACIÓN DE PERTENENCIA A UN CONJUNTO

Se introduce el símbolo de ***negación* [/]** con la expresión (relación de símbolos)

Símbolo básico negación (not): Reglas de uso

Se representa un ***Elemento*** x que ***no pertenece*** a un ***Conjunto*** A.

$x \,/\!\in A$

$: \; A_x.\text{-} \quad //\!\in \; := \; \in$

$$x \,//\!\in A \; := \; x \in A$$

$/$: ***Símbolo de Negación***

A_x: ***Axioma de la doble negación o tercero excluido***

2.3.2.- SINÓNIMO

Se define por comodidad un símbolo de no pertenencia:

Def. $a \notin A \; := \; a/\!\in A$

$\notin$: ***Símbolo de NO pertenencia o NO ser***

2.4.- SÍMBOLO BÁSICO SIMULTANEIDAD (AND)

2.4.1.- EXPRESIÓN DE SIMULTANEIDAD DE PERTENENCIA A UN CONJUNTO

Se introduce el símbolo de ***simultaneidad* [^]** con la expresión (relación de símbolos)

Símbolo básico simultaneidad (and) : Reglas de uso

Se representa un ***Elemento*** x que ***pertenece simultáneamente*** a un ***Conjunto A*** y a un ***Conjunto B***.

$(x\in A) \wedge (x\in B)$

$: \; A_x.\text{-} \quad (x\in A) \wedge (x\in B) \; := \; (x\in B) \wedge (x\in A)$

$\wedge$: ***Símbolo de Pertenencia Simultánea***

A_x : ***Axioma de la conmutatividad de la simultaneidad***

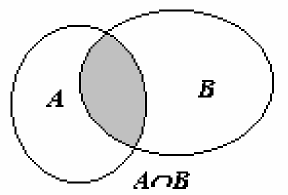
2.4.2.- SINÓNIMO

Def.: $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \; := \; (x\in A) \wedge (x\in B)$

2.4.3.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO INTERSECCIÓN

Def**.:* ***$A \cap B$:= { x: (x∈ A) ∧ (x∈ B) }

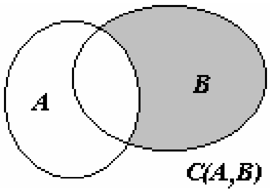
∩ : Símbolo de la Intersección de Conjuntos
$A \cap B$: Conjunto Intersección



2.5.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO COMPLEMENTARIO DE A SOBRE B

Def: C(A,B) := { x: (x /∈ A) ∧ (x∈ B) }

C(A,B) : Conjunto Complementario de A sobre B



2.6.- SÍMBOLO BÁSICO PARA TODO (ALL)

2.6.1.- EXPRESIÓN DE PARA TODO ELEMENTO DE UN CONJUNTO. INCLUSIÓN

Se introduce el símbolo de ***Para todo elemento de un conjunto*** **[∀]** con la expresión (relación de símbolos)

Símbolo básico para todo elemento de un conjunto (all) : Reglas de uso

El símbolo **[∀]** se emplea para representar el hecho, que ***Para Todo Elemento*** x que ***pertenezca*** al ***Conjunto A*** también pertenece al ***Conjunto B***.

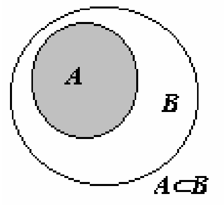
∀(x∈ A) : (x∈ B)

∀: Símbolo de Para Todo

El uso del símbolo ***Para Todo*** no ***es*** nada más ni nada menos que el concepto de ***Inclusión.*** Así que ***se considera*** equivalente ***(sinónimo)*** al uso del símbolo de ***Inclusión.***

$A \subset B$:= $\forall (x \in A)$: $(x \in B)$

$\subset$: Símbolo de inclusión
$A \subset B$: El Conjunto A está incluido en el Conjunto B.



2.6.2.- SINÓNIMOS

Def.: ***$B \supset A := A \subset B$***

$B \supset A$: El Conjunto B incluye el Conjunto A.

Una segunda forma de sinónimo de la inclusión entre dos conjuntos, es el símbolo de Subconjunto.
Se dice que A es un Subconjunto de B cuando A está incluido en B.

Def.: ***$A \in S(B) := A \subset B$***

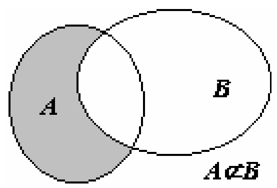
$A \in S(B)$: A es Subconjunto de B

2.6.3.- DEFINICIÓN DE: EXISTE UN ELEMENTO DEL CONJUNTO

Un tercer sinónimo del uso del símbolo ***Para Todo*** es el símbolo ***existe [∃] ,*** que se introduce por comodidad, para negar el Para todo:

Def.: ***$\exists (x \in A) : (x \notin B) \quad := \quad /\forall (x \in A) : (x \in B)$***

∃: Símbolo de Existencia



$\exists (x \in A) : (x \notin B)$

También se usa el símbolo de ***no existencia***

Def.: ***$[/\exists]\ (x \in A) \quad := /\exists (x \in A)$***

$: A_1 \quad //\exists := \exists$

[/∃] : Símbolo de No Existencia

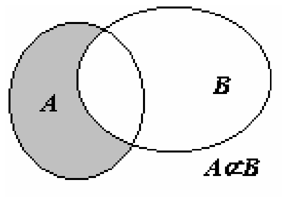
Obs.: Como se verá el símbolo de ***existencia*** es de ***equivalente*** al concepto de ***no inclusión***.

2.6.4.- SINÓNIMO: NO INCLUSIÓN

La negación de la ***no*** inclusión es:

Def.: $A \not\subset B \ := \ A \,/\!\!\subset B$

$A \not\subset B$ ***: A no está incluido en B***



El significado de la no inclusión significa que

$A \not\subset B \ := \ /\forall (x \in A) : (x \in B)$

O sea

$A \not\subset B \ := \ \exists (x \in A) : \ (x \notin B)$

Donde se observa que el símbolo existe ***[∃] ,*** es cómodo para definir la no inclusión, al negar el Para todo.

2.6.5.- DEFINICIÓN DE PROPIEDAD DE CONJUNTO VACÍO Y DEFINICIÓN DE CONJUNTO VACIO

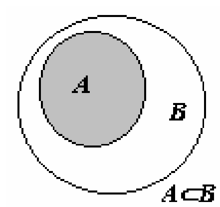
2.6.5.1.- DEFINICIÓN DE PROPIEDAD DE CONJUNTO VACÍO

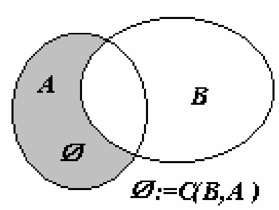
Una cuarta forma de representar la inclusión, o sea un cuarto sinónimo del uso del ***Para todo*** es el símbolo de ***Vacío [∅]*** , que es un concepto relativo a otro conjunto que se denomina Universo.

Def.: $C(B, A) \in \varnothing \ := \ A \subset B$

$C(B, A) \in \varnothing$ ***: Propiedad de ser Conjunto vacío***
B : Conjunto Universo

El concepto de ***tener la Propiedad de Conjunto vacío es relativo al Universo*** que se tome ***de referencia.*** O sea que un conjunto ***C(B,A) tiene la propiedad de vacío*** con ***respecto a un Universo B*** si





$$\begin{aligned} A \subset B &:= \ \forall (x \in A) : \ (x \in B) \\ &=: \ /\exists (x \in A) : \ (x \notin B) \\ &=: \ C(B, A) \in \varnothing \end{aligned}$$

2.6.5.2.- SINÓNIMO: DEFINICIÓN DE CONJUNTO VACÍO

Por extensión se puede definir como Conjunto vacío a aquel conjunto que no tiene elementos, todo esto siempre relativo a otro conjunto dado: el Universo considerado B.

Def.: $\varnothing := C(B,A) : \quad C(B,A) \in \varnothing$

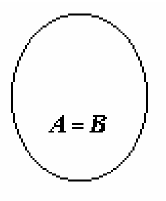
$:= \{x: / \exists (x \in A) : (x \notin B)\}$

2.6.6.- DEFINICIÓN DE IGUALDAD DE CONJUNTOS

Se define el símbolo de ***Igualdad de conjuntos [=]***

Def.: $A = B := (A \subset B) \cap (B \subset A)$

= : Símbolo de Igualdad de Conjuntos
A = B : El Conjunto A es igual al Conjunto B



2.6.7.- DEFINICIÓN DE DESIGUALDAD DE CONJUNTOS

Se define el símbolo de ***Desigualdad de conjuntos [≠]***

Def.: $A \neq B := A / = B$

≠ : Símbolo de Desigualdad de Conjuntos
A ≠ B : El Conjunto A no es igual al Conjunto B

2.6.8.- DEFINICIÓN DE IDENTIDAD DE ELEMENTOS DE CONJUNTOS

Se define el símbolo de ***identidad de elementos de conjuntos [≡]***

Def.: $x \equiv y := \{x\} = \{y\}$

≡: Símbolo de Identidad de Elementos de Conjuntos
x ≡ y : El elemento x es idéntico al elemento y

Obs: No se define la Identidad de Conjuntos, sino la Identidad de elementos de Conjuntos. Esto se hace para tener la implicación (asignación) dada en la definición.

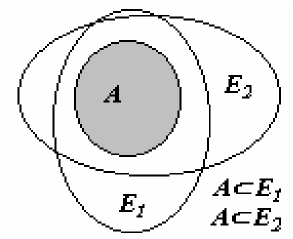
2.7.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO COMPLEMENTO DE A DENTRO DE B, UNIÓN , Y PARTICIÓN.

Por comodidad se introducen otros símbolos derivados a partir del de inclusión: ***[/A]*** Conjunto complemento de A dentro de B (Conjunto Complementario cuando A está incluido en B), ***[∪]*** Unión, y ***P(B)*** Partición de un Conjunto.

2.7.1.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO UNIVERSO

Def.: $E \in$ ***Universo*** $:= \forall A \quad : A \subset E$

Obs: Un Universo puede ser cualquier conjunto que incluye a otro. Su definición es arbitraria y relativa. Podría haber más de un Universo.



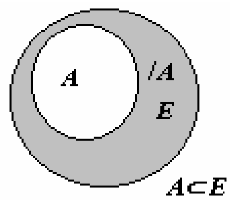
En general se llama Universo al Conjunto donde se analiza el Sistema. Es el límite del Sistema. En ese caso todos los Conjuntos están incluidos en el Universo.

2.7.2.- DEFINICIÓN DE COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO A INCLUIDO EN OTRO CONJUNTO E (UNIVERSO)

Def.: $A \subset E$

$/A := C(A,E)$

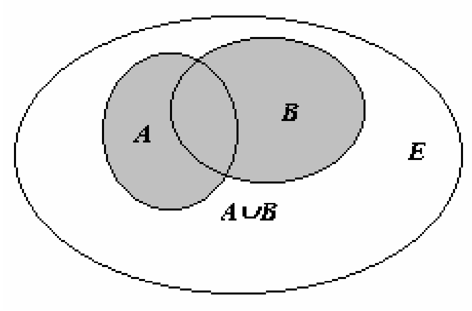
/A : Conjunto Complemento de A dentro de E
E : Universo



2.7.3.- DEFINICIÓN DE CONJUNTO UNIÓN

Def.: $(A \cup B) \quad := \quad /(/A \cap /B)$

$\cup$: ***Símbolo de Unión de Conjuntos***
$A \cup B$: ***Conjunto Unión***

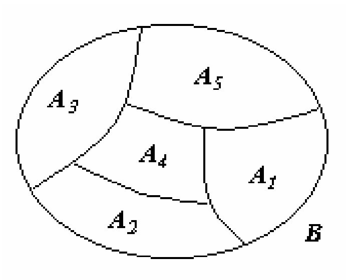


2.7.4.- PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

La partición de un conjunto B es un conjunto de conjuntos que cumple:

Def.: $P(B) := \{ A : A \in S(B)$
$: Axioma_1 \quad \forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$
$Axioma_2 \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = B \quad \}$

P(B) : Partición del conjunto B



2.8.- RED DE SÍMBOLOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y LÓGICA