

Segundo Cuatrimestre 2004

0.1. Parciales.

0.1.1. Parcial 09/10/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
09/10/04

1. Si

$$f(x, y) = \begin{cases} a & \text{cuando } |x| + |y| \leq 1 \\ x + by & \text{en otros casos} \end{cases}$$

(a) Hallar a, b de manera que $f(x, y)$ sea continua en $(1/2, 1/2)$ y en $(1/2, -1/2)$.

(b) Analizar la continuidad de $f(x, y)$ (con a, b determinados en (a)) en los puntos de la recta $x = 1/2$.

2. Sea $f(x, y) = -2x + y^2/2 + 1/2$. Hallar a de manera que la superficie S parametrizada por $(u, v) \mapsto (u^2 + au + v, u - v, -u - v)$, $-2 < u < 2$, $-2 < v < 2$ corte al gráfico de f en el punto $P = (1, -1, -1)$ y tenga en P el mismo plano tangente que dicho gráfico.

3. Si $F(x, y, z)$ es una función C^2 tal que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el entorno de $(1, -1, 2)$ define una función $z = f(x, y)$, y $\nabla F(1, -1, 2) = (2, 1, -1)$, hallar un vector v tal que la derivada direccional $f'((1, -1), v)$ sea 0.

4. Sea $f(x, y) = yxe^{2ax+by}$. Hallar todos los a y b no nulos tales que $f(x, y)$ tenga un solo extremo, y clasificarlo.

5. Resolver y fundamentar brevemente su respuesta

(a) $f(x, y)$ satisface $x^2 + y^2 + \text{sen}(f(x, y)) = 1/2$ y $f(0, 0) = \pi/6$. Hallar $\nabla(f)(0, 0)$.

(b) $f(x, y)$ es diferenciable en $(1, 1)$ y el plano tangente a su gráfico en $(1, 1, f(1, 1))$ tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$. Hallar la derivada direccional $f'((1, 1), (-1, 0))$.

1. Si

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{cuando } yx \geq -2 \\ y/x & \text{cuando } yx < -2 \end{cases}$$

y C es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Mostrar que $f(x, y) \geq 0$ cuando (x, y) está en C .

(b) Analizar la continuidad de $f(x, y)$ en su dominio.

2. Sea $f(x, y)$ una función C^1 tal que $\nabla(f)(1, 2) = (0, 0)$ y $f(1, 2) = 1$. Hallar a de manera que el plano tangente al gráfico de $g(x, y) = f(x, y) + 2a(x - 1)y$ en $P = (1, 2, g(1, 2))$ coincida con el de la superficie parametrizada por

$$(u, v) \mapsto (u^2 + v, -u + 2v, v^3), \quad -2 < u < 2, -2 < v < 2$$

en P .

3. Sean C la curva en \mathbb{R}^3 definida por las ecuaciones $x^2 + 9y^2 = 1, z = 1$, y $f(x, y)$ una función que satisface $F(x, y, f(x, y)) = 0$ (con $F \in C^2$) tal que $f(0, 1/3) = 1$. Si la recta tangente a C en $(0, 1/3, 1)$ está contenida en el plano tangente al gráfico de $f(x, y)$ en $(0, 1/3, 1)$, hallar $F'_x(0, 1/3, 1)$.

4. Dada $g(x, y) = (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 1) + 2c^2y^2 + 4cy$, hallar todos los c tales que $g(x, y)$ tenga extremo en $(1, -1)$, y clasificarlo.

5. Resolver y fundamentar brevemente su respuesta

(a) El vector $(1, -2)$ es tangente a la curva diferenciable parametrizada por

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

en el punto $(x(1), y(1))$, e $y'(1) = 4$. Hallar $x'(1)$.

(b) La derivada direccional $f'((1, 1), (-1/2, \sqrt{3}/2))$ de una función C^1 es 0. Hallar un vector tangente en $(1, 1)$ a la curva de nivel de $f(x, y)$ que pasa por ese punto.

0.1.3. Parcial 30/10/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
30/10/04

1. Si

$$f(x, y) = \begin{cases} (x-1)^2 y^2 & \text{cuando } x > 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Mostrar que en todos los puntos de \mathbb{R}^2 existen ambas derivadas parciales de $f(x, y)$.

2. Una curva C en \mathbb{R}^3 descrita por una parametrización diferenciable regular $t \mapsto \sigma(t), t \in (-1, 1)$ está contenida en la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^3 = 1$, y pasa por $P = \sigma(0) = (0, 0, 1)$. Sabiendo que $(1, 2, 0)$ es perpendicular a la curva en P , hallar un vector tangente a C en P . Justificar.

3. Sea S el gráfico de

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2y - x$$

Describir una curva C contenida en S , que pase por $(0, 0, 0)$, y tal que $v = (1, 2, 3)$ sea tangente a C en $(0, 0, 0)$.

4. Dada $f(x, y) = -x/2 - y + (x-1)(y+1)$, estudiar los extremos de

$$g(x, y) = f(2x, y-x) - 3y^2/4$$

5. Resolver y fundamentar brevemente su respuesta

(a) Sea $f(x, y) = (2x + 3y - 1)^4$. Hallar todos los puntos donde $f(x, y)$ tiene mínimo.

(b) La derivada direccional de la función diferenciable $f(x, y)$ en $(0, 0)$ en la dirección $(-1, 0)$ es negativa, y en la dirección $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ positiva. ¿Qué signo tiene $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$?

1. Si

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y & \text{cuando } y > x \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

mostrar que todas las derivadas direccionales de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ existen y valen 0.

2. Dada una superficie S parametrizada por

$$(u, v) \mapsto (u + 2v, v^2 - u, 1 + v), \quad -2 < u < 2, \quad -2 < v < 2$$

hallar una ecuación del plano normal en $(1, 2, 2)$ a la curva en S definida por $u^2 = v^2$.

3. La ecuación $F(x, y, z) = 0$ en un entorno de $(1, 1, 1)$ define $z = f(x, y)$, y $\nabla F(1, 1, 1) = (1, 2, 2)$. Hallar una ecuación para la recta tangente en $(1, 2)$ a la curva de ecuación $f(3x - y, e^{2x-y}) = 1$.

4. Analizar los extremos de $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{x}{y} + y$.

5. Resolver y fundamentar brevemente su respuesta

(a) El vector $(1, -1, a)$ es perpendicular a la superficie de ecuación

$$x^2 - y^2 + 4z = 0$$

en $(1, 1, 0)$. Hallar a .

(b) Sabiendo que $f(x, y) \in C^1$ tiene máximo en $(1, 1)$ y $f(1, 1) = 2$, hallar una ecuación para la recta tangente en $(1, 1)$ a la curva de ecuación $f(x, y) - x^2 = 1$.

0.1.5. Parcial 07/12/04.

Análisis II
Parcial
Tema 1
07/12/04

1. Si

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + y & \text{cuando } y \geq x^2 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Describir todos los vectores v de norma 1 tales que existe la derivada direccional $f'((0, 0), v)$ y es estrictamente positiva. Justificar.

2. Una curva C en \mathbb{R}^3 descrita por la parametrización

$$t \mapsto (t^2 + at, t^3 + t, -t + 2 \operatorname{sen}(b(t + 1)) - 1) \quad -1 < t < 2$$

pasa por $(0, 0, 1)$ y es tangente en ese punto a la superficie de ecuación

$$2x + 2y^2 + (z - 1)^3 = 0$$

Hallar a y b , con $0 < b < \pi$.

3. Sea S la superficie parametrizada por

$$(\rho, \varphi) \mapsto (\sqrt{\rho^2 - 1}, \rho \cos(\varphi), \rho \operatorname{sen}(\varphi)), \quad 1 < \rho < 3, 0 < \varphi < \pi$$

Sea Π el plano tangente a S en $(\sqrt{3}, 0, 2)$. Mostrar que la intersección de Π y S está formada por dos segmentos.

4. Dada $f(x, y) = -(x - y)^2 - xy - ax - by + c$, hallar a, b, c de manera que $f(x, y)$ tenga un máximo en $(-2, -2)$ de valor 8.

5. Resolver y fundamentar brevemente su respuesta

(a) Sea $f(x, y)$ una función C^1 tal que $f(1, 2) = 2$ y $\nabla f(1, 2) \neq (0, 0)$, y sea $g(x, y) = 3f(x, y) - 5$. Mostrar que $\nabla f(1, 2)$ es perpendicular a la curva de ecuación $g(x, y) = 1$ en $(1, 2)$.

(b) Si $f(x, y)$ es una función C^3 tal que $\nabla f(1, 2) = (0, 0)$ y

$$H(f)(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mostrar que $g(x, y) = f(x, 2y)$ tiene mínimo en $(1, 1)$.

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 07/12/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 07/12/04
TEMA 1

1. Sea C la curva de ecuaciones

$$z = 3 + x, z = 3x^2 + 4y^2, \quad x \geq 1$$

Calcular la circulación de $F(x, y, z) = (e^{\sin(x)} + yz + xy, y + xz, z)$ a lo largo de C , recorrida de manera que el tangente tenga coordenada y positiva.

2. Sea S la superficie descrita por

$$y = x^2, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad y \leq 1$$

Dada una función C^2 f calcular el flujo de $F(x, y, z) = (f(y, z), 3y, 0)$ a través de S orientada con el normal de coordenada y positiva.

3. Hallar el volumen de la región descrita en coordenadas cilíndricas por

$$\cos(\varphi) \leq \rho \leq 2 \cos(\varphi), \quad 0 \leq z \leq 4 - \rho \cos(\varphi)$$

Graficar.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(a) Hallar el máximo absoluto de $f(x, y) = x^2 + x + y^2 + 1$ en la curva de ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.(b) Sea $f(x, y) = y + 1$. Mostrar que el promedio de f sobre la circunferencia de radio 2 centrada en $(0, 0)$ es positivo. (Nota: el *promedio* de una función escalar sobre una curva es la integral de línea de la función a lo largo de la curva dividida por la longitud de la curva)5. Hallar la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 4e^{-t}$$

tal que $y(0) = y(\pi/4) = 0$.

0.2.2. Coloquio 21/12/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 21/12/04
TEMA 1

1. Sea C la curva de ecuaciones

$$z = x^2, y = 1, 0 \leq x \leq 1$$

y sea $F(x, y, z) = (3x - 2z, y + z, 0)$

(a) Graficar C y calcular la circulación de F a lo largo de C , recorrida de manera que el tangente tenga coordenada x positiva.

(b) Calcular el flujo del rotor de F a través de la superficie descrita por $y = 1, x^2 \leq z \leq x, 0 \leq x \leq 1$, con el normal de coordenada y negativa.

2. Sea S la superficie descrita por la parametrización

$$(u, v) \mapsto (u, u^2 - v^2, v), \quad u^2 + v^2 \leq 4$$

Calcular el área de S .

3. Sea S la superficie dada por la ecuación $z = f(x, y), (x, y) \in D$, donde $f(x, y)$ es una función C^2 , tal que $f(x, y) > 0$ cuando $x^2 + y^2 < 1$ y $f(x, y) = 0$ cuando $x^2 + y^2 = 1$ y D es el disco descrito por $x^2 + y^2 \leq 1$. Si el flujo de $F(x, y, z) = (x + z^2, 2y, 3z)$ a través de S orientada con el normal con z positiva es 2, hallar

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(a) Hallar el punto más cercano al origen en la recta de ecuación $3x - 2y = 1$.

(b) Sea $f(u, v)$ una función C^2 tal que $\nabla f(u, v) = (2uv - 2v, u^2 - 2u - 1)$. Hallar la derivada direccional $g'((2, 0), (-1, 0))$, siendo $g(x, y) = f(x^2 + 1 + y, -y)$

5. Hallar una función $y(t)$ estrictamente positiva, inversamente proporcional a su derivada, y que satisface $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

0.2.3. Coloquio 22/02/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 22/02/05 TEMA 1

1. Sea $F(x, y, z) = (4y - z, 3x - y, 2z)$ y sea C una curva regular contenida en el plano Π de ecuación $3x + 2y - 4z = 1$. Sabiendo que C encierra una región R en Π de área 4, calcular la circulación de F a lo largo de C con orientación elegida de manera que su proyección en el plano xy se recorra en sentido antihorario.

2. Dada una función $C^2 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, calcular el flujo del campo $F(x, y, z) = (y, f(z), 2z)$ a través de la superficie descrita por $y^2 + z^2 = 25, 0 \leq x \leq 1, z \geq 0$, orientada de manera que su normal tenga coordenada z negativa.

3. Hallar el área de la superficie definida por $x^2 + z^2 = y^2, x^2 + z^2 \leq 2z, x \geq 0, y \geq 0$.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(a) Sean $f(x, y, z) = y^2 - 2x^2$ y C una curva en \mathbb{R}^3 . Si para cada punto P de C , C es perpendicular en P a la superficie de nivel de f que pasa por P , mostrar que C está contenida en un plano.

(b) Hallar el valor de a entre 0 y 1 que hace máxima la circulación de $F(x, y) = (2y, 4x)$ a lo largo de la curva de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1-a)^2} = 1$ (orientada en sentido antihorario).

5. Hallar todas las soluciones $y(x)$ ($x > 0$) de la ecuación diferencial $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 1$ tales que $y(1) = 1$ e $y(2) = -1$.

0.2.4. Coloquio 01/03/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 01/03/05 TEMA 1

1. Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ un campo vectorial C^2 tal que el flujo de su rotor a través de la superficie descrita por $3x + z = 3, 2x^2 + y^2 \leq 9$, orientada de manera que la coordenada z de su normal es positiva, es 3. Calcular la circulación del campo

$$G(x, y, z) = (P(x, y, z) + z^2, Q(x, y, z), R(x, y, z) + x^3/3)$$

a lo largo de la curva de ecuaciones $3x + z = 3, 2x^2 + y^2 = 9$, orientada de manera que su proyección en el plano xy sea recorrida en sentido horario.

2. Hallar el volumen del cuerpo descrito en coordenadas cilíndricas por $-\sqrt{1-\rho^2} \leq z \leq 1-\rho$. Graficar.

3. Dado $h > 0$, sea R la región en el espacio descrita por $x^2 + z^2 \leq 25, h \leq y \leq 4$. Determinar h , sabiendo que el flujo del campo $F(x, y, z) = (2x + y^2, 0, z - y^2)$ a través del borde y hacia el exterior de R es 150π .

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(a) Sean $f(x, y, z) = x + x^2 + y^3 + z^2$ y C la curva en \mathbb{R}^3 de ecuaciones $ax + 5y = 5, x^2 + (y-1)^2 = bz$. Hallar todos los $a, b \neq 0$ de manera que C sea perpendicular a la superficie de nivel de $f(x, y, z)$ que pasa por $(0, 1, 0)$.

(b) Sea $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el entorno de $(1, 2, 1)$, siendo F una función C^2 , $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(1, 2, 1) = 0, F_z(1, 2, 1) \neq 0$. Mostrar que si $f(x, y)$ tiene extremo en $(1, 2)$, el plano tangente a la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$ en $(1, 2, 1)$ es horizontal.

5. Hallar a, b de manera que la ecuación diferencial $(2xy - ay) dx + (x^2 - bx) dy = 0$ sea exacta y la curva solución que pasa por $(1, 1)$ sea en este punto paralela a la recta de ecuación $2x + 3y = 5$.

0.2.5. Coloquio 08/03/05.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II COLOQUIO 08/03/05 TEMA 1

1. Sean $F(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{2}, xy, \frac{x^2+y^2}{2}\right)$, y R un trozo de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cuyo borde es una curva regular C . Mostrar que la circulación de F a lo largo de C es 0.

2. Sea S la superficie descrita por $4x^2 + y^2 - z = 3, z \leq 6$. Dado un campo escalar $C^2 f(x, y)$ y $a \in \mathbb{R}$, sea $F(x, y, z) = (f'_y(x, y), -f'_x(x, y), 3az)$. Hallar a , sabiendo que el flujo de F a través de S orientada con su normal alejándose del eje z es 3π .

3. Hallar el promedio del campo escalar $f(x, y, z) = xy + z$ a lo largo de la curva parametrizada por $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 2t), 0 \leq t \leq \pi$.

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(a) La proyección en el plano yz de una región R contenida en el plano de ecuación $2x - y + z = 0$ tiene área 2. Hallar el área de R .

(b) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $f(2, 3) = 5$ y la máxima derivada direccional de f en $(2, 3)$ vale 4. Dada $g(x, y) = f(x + 1, y + 2)$, calcular la derivada direccional $g'((1, 1), v)$, siendo v un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\nabla(f)(2, 3)$.

5. La velocidad de una partícula en el plano depende de su posición según la ley $V(x, y) = (x, 2y+1)$. Sabiendo que la partícula pasa por el punto $(1, 2)$, mostrar que también pasa por $(2, 19/2)$.